TMA043 Flervariabelanalys E2 H09

Carl-Henrik Fant

Matematiska vetenskaper
Chalmers
Göteborgs universitet
tel. (arb) 772 35 57
epost: carl-henrik.fant@chalmers.se

25 september 2009

Outline

1. Flervariabelanalys E2, Vecka 4 Ht09
Kapitel 14.1 - 14.6
   - 14.1 Dubbelintegralens definition.
   - 14.2 Upprepad enkelintegralsberäkning.
   - 14.3 Generaliserade dubbelintegraler och medelvärdessatsen.
   - 14.4 Dubbelintegraler i polära koordinater, substitution.
   - 14.5 Trippelintegraler.
   - 14.6 Substitution i trippelintegraler.

Lärmål

För betyget godkänd skall du kunna:

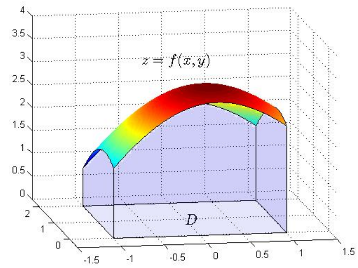
Adams	Mål
14.1	känna till och utnyttja dubbelintegralens egenskaper (sid 758) vid problemlösning

Lärmål

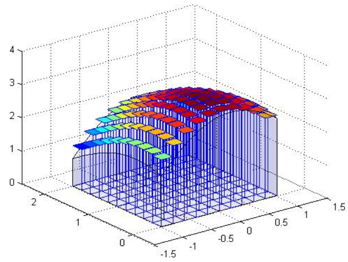
För högre betyg skall du dessutom kunna:

Adams	Mål
14.1	utnyttja symmetrier vid beräkning av dubbelintegraler (se t.ex ex. 3 s 758-759).

Dubbelintegral kan tolkas som volymen av en kropp



Volymen av en kropp beräknas genom att kroppen approximeras med många små rätblock.



Summan av deras volymer ger ett närmevärde till kroppens volym. (se matlabdemo integral2.m)

Låt D vara en axelparallell rektangel i xy-planet:
$D = \{(x, y) : \ a \le x \le b, \quad c \le y \le d \ \}$.
En partition P av D är en indelning av D i mindre, axelparallella rektanglar.
Normen av partitionen, $\|P\|$ är längsta diagonalen i alla delrektanglarna.

En *Riemannsumma* till f erhålls om man väljer en punkt (x_{ij}^*, y_{ij}^*) i varje delrektangel $R_{ij} = \{(x, y) : x_{i-1} \le x \le x_i, \ y_{j-1} \le y \le y_j \ \}$ och bildar summan

$$R(f, P) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} f(x_{ij}^*, y_{ij}^*) \Delta A_{ij}$$

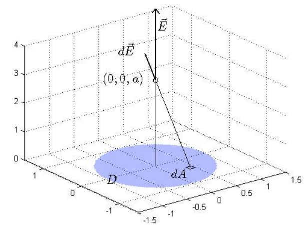
där $\Delta A_{ij} = (x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1})$ är arean av rektangel R_{ij}.

Om $f(x^*_{ij}, y^*_{ij} > 0$ kan termen $f(x^*_{ij}, y^*_{ij})\Delta A_{ij}$ i Riemannsumman tolkas som volymen av ett rätblock med bas R_{ij} och höjd $f(x^*_{ij}, y^*_{ij})$. När indelningen är "oändligt fin" är Riemannsumman volymen av kroppen med bottenyta D och ytan $z = f(x, y)$ till lock.

Inte bara volymer kan approximeras med Riemannsumma. Låt t.ex. $q(x, y)$ vara laddningstätheten på en platta. Då är Riemannsumman till q ett närmevärde till laddningen Q på plattan.

Fältstyrka

En tunn isolerande cirkulär platta har ytladdningstäthet σ As/m^2. Vi vill bestämma fältstyrkan i en punkt rakt ovanför plattans centrum.



På grund av rotationssymmetri är $\vec{E} = E\mathbf{k}$. Coulombs lag ger att bidraget $d\vec{E}$ från areaelementet dA är

$$\frac{\sigma dA}{4\pi\epsilon_0\epsilon_r d^2}\hat{e},$$

där d är avståndet från areaelementet till punkten och $\hat{e}$ är en enhetsvektor i riktning mot punkten.

Bidraget dE är $\frac{\sigma dA}{4\pi\epsilon_0\epsilon_r d^2}\frac{a}{\sqrt{x^2+y^2+a^2}}$.

Således är

$$E = \iint_D dE = \iint_D \frac{\sigma}{4\pi\epsilon_0\epsilon_r(x^2+y^2+a^2)}\frac{a}{\sqrt{x^2+y^2+a^2}}dA$$

Definition: Dubbelintegral över en rektangel

Funktionen f är *integrerbar* över rektangeln D och har *dubbelintegralen*

$$I = \iint_D f(x, y)dA$$

om det är så att

för varje positivt tal ϵ finns det ett tal δ (som beror på ϵ) så att

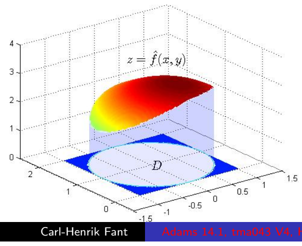
$$|R(f, P) - I| < \epsilon$$

för varje indelning P av D som uppfyller $\|P\| < \delta$ och för alla val av punkter i delrektanglarna i P.

Dubbelintegral över allmännare områden

Antag $f(x,y)$ är definierad och begränsad på ett begränsat område D. Välj en axelparallell rektangel R, som innehåller D.
Låt $\hat{f}(x,y)$ vara utvidgningen av f till R som ges av

$$\hat{f}(x,y) = \begin{cases} f(x,y), & \text{om} \quad (x,y) \in D \\ 0 & \text{om} \quad (x,y) \notin D. \end{cases}$$



Vecka 4 H09
14.1 Dubbelintegralens definition.
14.2 Upprepad enkelintegralsberäkning.
14.3 Generaliserade dubbelintegraler och medelvärdessatsen.
14.4 Dubbelintegraler i polära koordinater, substitution.
14.5 Trippelintegraler.
14.6 Substitution i trippelintegraler.

Då ges dubbelintegralen av f över D av:

$$\iint_D f(x,y)\,dA = \iint_R \hat{f}(x,y)\,dA$$

om den senare integralen existerar.

CHALMERS | GÖTEBORGS UNIVERSITET
Carl-Henrik Fant Adams 14.1, tma043 V4, Ht09

Vecka 4 H09
14.1 Dubbelintegralens definition.
14.2 Upprepad enkelintegralsberäkning.
14.3 Generaliserade dubbelintegraler och medelvärdessatsen.
14.4 Dubbelintegraler i polära koordinater, substitution.
14.5 Trippelintegraler.
14.6 Substitution i trippelintegraler.

Sats 1

Om integrationsområdet D är slutet och begränsat, och har en ”snäll” rand och f är kontinuerlig på D, så är f integrerbar över D.

CHALMERS | GÖTEBORGS UNIVERSITET
Carl-Henrik Fant Adams 14.1, tma043 V4, Ht09

Vecka 4 H09
14.1 Dubbelintegralens definition.
14.2 Upprepad enkelintegralsberäkning.
14.3 Generaliserade dubbelintegraler och medelvärdessatsen.
14.4 Dubbelintegraler i polära koordinater, substitution.
14.5 Trippelintegraler.
14.6 Substitution i trippelintegraler.

Dubbelintegralens egenskaper

- $\iint_D f(x,y)dA = 0$ om D har area 0
- $\iint_D dA =$ arean av D
- Om $f(x,y) \geq 0$ i hela D så är $\iint_D f(x,y)dA = V \geq 0$ där V är volymen av kroppen som begränsas nedåt av D och uppåt av ytan $z = f(x,y)$
- Om $f(x,y) \leq 0$ i hela D så är $\iint_D f(x,y)dA = -V \leq 0$ där V är volymen av kroppen som begränsas uppåt av D och nedåt av ytan $z = f(x,y)$

CHALMERS | GÖTEBORGS UNIVERSITET
Carl-Henrik Fant Adams 14.1, tma043 V4, Ht09

- Om k är en konstant så gäller
$$\iint_D k \cdot f(x,y)dA = k \cdot \iint_D f(x,y)$$
- $$\iint_D (f(x,y)+g(x,y))dA = \iint_D f(x,y)dA + \iint_D g(x,y)dA$$
- Om $D = D_1 \cup D_2$ och arean av $D_1 \cap D_2$ är 0, så är
$$\iint_D f(x,y)dA = \iint_{D_1} f(x,y)dA + \iint_{D_2} f(x,y)dA$$

- Om $f(x,y) \le g(x,y)$ i hela D så gäller
$$\iint_D f(x,y)dA \le \iint_D g(x,y)dA$$
- $$\left| \iint_D f(x,y)dA \right| \le \iint_D |f(x,y)|\, dA$$

Lärmål

För betyget godkänd skall du kunna:

Adams	Mål
14.2	beräkna dubbelintegral genom upprepad enkelintegration (sats 14.2.2).

Lärmål

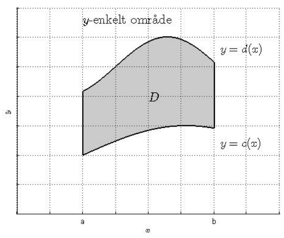
För högre betyg skall du dessutom kunna:

Adams	Mål
14	beräkna itererad enkelintegral, två/tre variabler, genom att kasta om integrationsordningen (se t.ex. övn. 14.2.15).

y-enkla och x-enkla områden.

Ett område D kallas y-enkelt om det kan skrivas

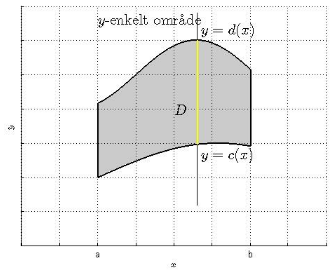
$$D = \{(x,y): \; a \le x \le b, \; c(x) \le y \le d(x)\}.$$



y-enkla områden.

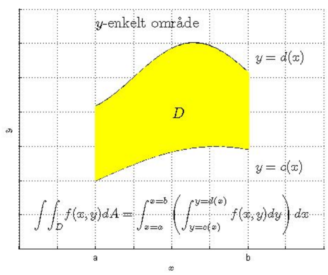
Ett område D kallas y-enkelt om det kan skrivas

$$D = \{(x,y): \; a \le x \le b, \; c(x) \le y \le d(x)\}.$$



Upprepad enkelintegral

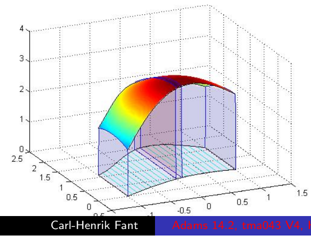
Om D är y-enkelt $D = \{(x,y): \; a \le x \le b, \; c(x) \le y \le d(x)\}$, så beräknas dubbelintegralen över D genom upprepad integrering:



Upprepad enkelintegral

Om D är y-enkelt $D = \{(x,y): \; a \le x \le b, \; c(x) \le y \le d(x)\}$, så beräknas dubbelintegralen över D genom upprepad integrering:

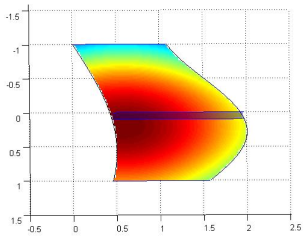
$$\iint_D f(x,y)\,dA = \int_a^b \left(\int_{c(x)}^{d(x)} f(x,y)\,dy \right) dx.$$



x-enkla områden.

Ett område D kallas x-enkelt om det kan skrivas

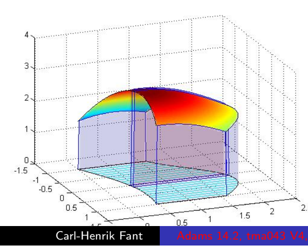
$$D = \{(x, y) : \ c \leq y \leq d, \ a(y) \leq x \leq b(y)\}.$$



Upprepad enkelintegral

Om D är x-enkelt $D = \{(x, y) : \ c \leq y \leq d, \ a(y) \leq x \leq b(y)\}$, så beräknas dubbelintegralen över D genom upprepad integrering:

$$\iint_D f(x, y)\, dA = \int_c^d \left(\int_{a(y)}^{b(y)} f(x, y)\, dx \right) dy.$$



Lärmål

För betyget godkänd skall du kunna:

Adams	Mål
14.3	avgöra huruvida en integral är generaliserad och i så fall förklara vad som gör den generaliserad.
14.3	beräkna generaliserad dubbelintegral för $f(x, y) \geq 0$ och därigenom avgöra konvergens/divergens.
14.3	veta vad som menas med medelvärdet av en funktion av två eller tre variabler på ett område.

Lärmål

För högre betyg skall du dessutom kunna:

Adams	Mål
14.3	formulera och bevisa medelvärdessatsen (sats 14.3.3) för dubbelintegraler.

Generaliserad integral

En dubbelintegral $\int\int_D f(x,y)dA$ kallas *generaliserad (improper)* om

- D inte är en begränsad mängd, eller
- f inte är begränsad på D

Exempel

$$\int\int_D \frac{1}{x-2} dA$$

är generaliserad om D, eller randen till D, innehåller någon punkt där $x-2=0$ eller om D är obegränsad.

- $D: 3 \leq x,\ 0 \leq y \leq 2$ är obegränsad, integralen är generaliserad.
- $D: 2 < x \leq 4,\ 0 \leq y \leq 2$ är begränsad, f är inte begränsad på D, integralen är generaliserad.
- $D: 2 < x \leq 4,\ 0 \leq y$ är obegränsad, f är inte begränsad på D, integralen är generaliserad.
- $D: 3 < x \leq 4,\ 0 \leq y \leq 2$ är begränsad, f är begränsad på D, integralen är inte generaliserad.

Konvergens för generaliserade integraler

Detta svåra begrepp undviker Adams nästan helt. Man skall, i princip, ta en följd av allt större begränsade delmängder D_n av D (D_n omfattar D_{n-1}), där f är begränsad och sådana att varje punkt i D ligger i någon D_n och därmed alla följande. Konvergens innebär då att man får samma gränsvärde då $n \to \infty$ oavsett hur mängderna D_n valts.

Fullständigt ohanterbart med andra ord.

Konvergens för generaliserade integraler

- Om f inte växlar tecken i D och D är y-enkelt så gäller Fubinis sats:
- Om
$$\int_a^b \left(\int_{c(x)}^{d(x)} f(x,y)\,dy \right) dx.$$
är ändlig så är den generaliserade integralen konvergent och
$$\int\int_D f(x,y)\,dA = \int_a^b \left(\int_{c(x)}^{d(x)} f(x,y)\,dy \right) dx.$$

Medelvärde

- Medelhöjden i en kropp $K:\ (x,y) \in D,\ 0 \le z \le f(x,y)$ är den höjd h en cylinder med samma bas och samma volym som K har.
  Alltså
  $$h \cdot \text{ arean av } D = \iint_D f(x,y)\,dA$$
- Medelvärdet m för en funktion på ett område D definieras på motsvarande sätt av:
  $$m \cdot \text{ arean av } D = \iint_D f(x,y)\,dA$$
- Givetvis under förutsättning att arean av $D \neq 0$.

Medelvärdessatsen

Om f är kontinuerlig på den slutna, begränsade, sammanhängande mängden D

och f har medelvärdet m på D,

så finns det en punkt (x_0, y_0) i D sådan att

$f(x_0, y_0) = m$.

$$\iint_D f(x,y)\,dA = f(x_0, y_0) \cdot \text{ arean av } D.$$

Lärmål

För betyget godkänd skall du kunna:

Adams	Mål
14.4	ange sambandet mellan cartesiska och polära koordinater samt sambandet mellan areaelementen.
14.4	ange hur ett område givet i cartesiska koordinater transformeras vid övergång till andra koordinater och omvänt.
14.4	känna till vad som menas med att en transformation $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ är ett-ett (sid 777).
14.4	beräkna dubbelintegraler med hjälp av föreslagen variabelsubstitution och tillämpning av sats 14.4.4.

Lärmål

För högre betyg skall du dessutom kunna:

Adams	Mål
14.4	formulera satsen om variabelsubstitution i dubbelintegraler (sid 778).
14.4	välja lämplig variabelsubstitution för beräkning av dubbelintegral

Variabelsubstitution

Antag att $x = x(u,v),\ y = y(u,v)$ är en 1-1 avbildning av ett område E i $uv-$planet på området D i $xy-$planet. Antag att funktionerna $x = x(u,v)$ och $y = y(u,v)$ och deras partiella första ordningens derivator är kontinuerliga.
Om $f(x,y)$ är integrerbar på D så är $f(x(u,v), y(u,v))$ integrerbar på E och

$$\iint_D f(x,y)\, dA = \iint_D f(x,y)\, dxdy =$$

$$\iint_E f(x(u,v), y(u,v)) \left| \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \right| dudv$$

Areaskala

$$\left| \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \right|$$

är den lokala areaskalan för avbildningen $x = x(u,v),\ y = y(u,v)$ av området E i $uv)-$planet på området D i $xy-$planet. Notera att $\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}$ är determinanten av Jacobimatrisen, $\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|$ är absolutbeloppet av determinanten.

Areaskalan kan omöjligen vara negativ.

Polär substitution

$$\begin{cases} x &= r\cos\theta \\ y &= r\sin\theta \end{cases}$$

$$dA = dxdy = r drd\theta$$

Faktorn r **får** du inte glömma!

Lärmål

För betyget godkänd skall du kunna:

Adams	Mål
14.5	beräkna trippelintegraler genom upprepad enkelintegration.

Lärmål

För högre betyg skall du dessutom kunna:

Adams	Mål
14	beräkna itererad enkelintegral, två/tre variabler, genom att kasta om integrationsordningen (se t.ex. övn. 14.2.15).

Upprepad integration i trippelintegraler.

Det finns i princip två sätt att utföra upprepad integration i trippelintegraler.

- Projektion på koordinatplan:

$$\iiint_D f(x,y,z)dV = \iint_{D_{xy}} \left(\int_{z=a(x,y)}^{z=b(x,y)} f(x,y,z)dz \right) dxdy$$

  där D_{xy} är projektionen av kroppen D på xy-planet. (Kräver att området är z-enkelt.)
- Skivning parallellt med koordinatplan:

$$\iiint_D f(x,y,z)dV = \int_a^b \left(\iint_{D_z} f(x,y,z)dxdy \right) dz$$

  där D_z är snittet mellan kroppen D och planet $z =$ konstant.

Lärmål

För betyget godkänd skall du kunna:

Adams	Mål
14.6	ange sambanden mellan cartesiska och sfäriska/cylindriska koordinater sambandet mellan volymelementen.
14.6	beräkna trippelintegraler med hjälp av föreslagen variabelsubstitution.

Lärmål

För högre betyg skall du dessutom kunna:

Adams	Mål
14.6	välja lämplig variabelsubstitution för beräkning av trippelintegral
14	beräkna itererad enkelintegral, två/tre variabler, genom att kasta om integrationsordningen (se t.ex. övn. 14.2.15).

Variabelsubstitution

Antag att $x = x(u, v, w)$, $y = y(u, v, w)$, $z = z(u, v, w)$ är en 1-1 avbildning av ett område E i $uvw-$rummet på området D i $xyz-$rummet. Antag att funktionerna $x = x(u, v, w)$, $y = y(u, v, w)$ och $z = z(u, v, w)$ och deras partiella första ordningens derivator är kontinuerliga.
Om $f(x, y, z)$ är integrerbar på D så är $f(x(u, v, w), y(u, v, w), z(u, v, w))$ integrerbar på E och

$$\iiint_D f(x, y, z)\, dV = \iiint_D f(x, y, z)\, dxdydz =$$

$$\iiint_E f(x(u, v, w), y(u, v, w), z(u, v, w)) \left| \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)} \right| dudvdw$$

Sfärisk (rymdpolär) substitution

$$\begin{cases} x &= \rho\cos\theta\sin\phi \\ y &= \rho\sin\theta\sin\phi \\ z &= \rho\cos\phi \end{cases}$$

$$dV = dxdydz = \rho^2\sin\phi\, d\rho d\theta d\phi$$