TMA043 Flervariabelanalys E2 H09

Carl-Henrik Fant

Matematiska vetenskaper
Chalmers
Göteborgs universitet
tel. (arb) 772 35 57
epost: carl-henrik.fant@chalmers.se

7 oktober 2009

Outline

Lärmål

För betyget godkänd skall du kunna:

Adams	Mål
15.1	skissa ett vektorfält i planet, skissa fältlinjer till det och redogöra för sambandet mellan vektorfält och fältlinjer.

Lärmål

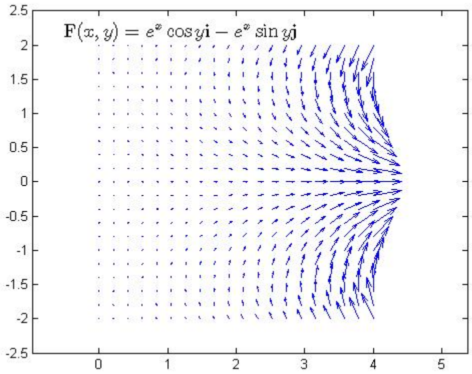
För högre betyg skall du dessutom kunna:

Adams	Mål
15.1	bestämma fältlinjer till vektorfält i planet.

Vektorfält

Ett vektorfält i planet är en funktion $\mathbf{F}$ från $\mathbb{R}^2$ till $\mathbb{R}^2$.
$\mathbf{F}(x, y) = f(x, y)\mathbf{i} + g(x, y)\mathbf{j}$

Vi uppfattar (x, y) som en punkt i planet och $\mathbf{F}(x, y)$ som en vektor i planet. För att åskådliggöra vektorfältet väljer vi ett antal punkter (x_i, y_i) och avsätter vektorerna $\mathbf{F}(x_i, y_i)$ i respektive punkter.



Fältlinjer

Fältlinjerna till ett vektorfält är kurvor vars tangenter är parallella med vektorfältets vektorer.

Alltså: Låt (a, b) vara en punkt i definitionsmängden till vektorfältet $\mathbf{F}(x, y) = f(x, y)\mathbf{i} + g(x, y)\mathbf{j}$.

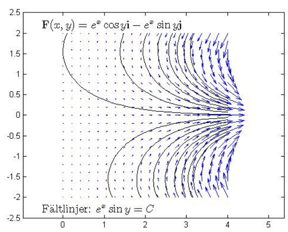
En fältlinje genom denna punkt är en kurva $\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t))$ sådan att

- $\mathbf{r}(t_0) = (x(t_0), y(t_0) = (a, b)$
- i varje punkt $(x(t), y(t))$ på kurvan är kurvtangenten $x'(t)\mathbf{i} + y'(t)\mathbf{j}$ parallell med fältvektorn $f(x(t), y(t))\mathbf{i} + g(x(t), y(t))\mathbf{j}$ i den punkten.

Fältlinjer

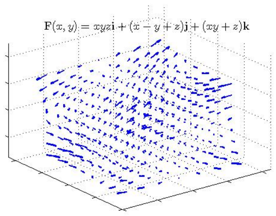
Fältlinjerna är lösningarna till differentialekvationen

$$\frac{dx}{f(x, y)} = \frac{dy}{g(x, y)}$$



Vektorfält rummet

Ett vektorfält i rummet är en funktion $\mathbf{F}$ från $\mathbb{R}^3$ till $\mathbb{R}^3$.
$\mathbf{F}(x, y, z) = f(x, y, z)\mathbf{i} + g(x, y, z)\mathbf{j} + h(x, y, z)\mathbf{k}$
uppfattad på samma sätt som vektorfält i planet.



Vecka 5 H09
15.1 Vektorfält och skalärfält
15.2 Konservativa vektorfält (t.o.m. exempel 5)
15.3 Kurvintegraler
15.4 Kurvintegral av vektorfält
15.5 Ytor och ytintegraler
15.6 Orienterade ytor och flödesintegraler (normal-ytintegraler)

Lärmål

För betyget godkänd skall du kunna:

Adams	Mål
15.2	definiera begreppet *konservativt vektorfält i ett område* och beräkna *potential* till ett konservativt fält.
15.2	känna till nödvändiga villkor för att ett vektorfält skall vara konservativt (sid 813) och med hjälp av dessa kunna visa att ett givet vektorfält inte är konservativt.
15.2	förklara sambandet mellan nivåkurvor till potential och fältlinjerna till ett konservativt vektorfält.

Vecka 5 H09
15.1 Vektorfält och skalärfält
15.2 Konservativa vektorfält (t.o.m. exempel 5)
15.3 Kurvintegraler
15.4 Kurvintegral av vektorfält
15.5 Ytor och ytintegraler
15.6 Orienterade ytor och flödesintegraler (normal-ytintegraler)

Lärmål

För högre betyg skall du dessutom kunna:

Adams	Mål
15.2	Inga överbetygsmål i detta avsnitt

Vecka 5 H09
15.1 Vektorfält och skalärfält
15.2 Konservativa vektorfält (t.o.m. exempel 5)
15.3 Kurvintegraler
15.4 Kurvintegral av vektorfält
15.5 Ytor och ytintegraler
15.6 Orienterade ytor och flödesintegraler (normal-ytintegraler)

Konservativt fält

Ett vektorfält, $\mathbf{F}(x, y,) = f(x, y)\mathbf{i} + g(x, y)\mathbf{j}$ med definitionsmängd D, kallas *konservativt* om det finns en funktion $\phi(x, y)$ definierad på D, sådan att

$$\nabla\phi(x, y) = \mathbf{F}(x, y) \text{ för alla } (x, y) \in D$$

Funktionen $\phi(x, y)$ kallas *potential* till $\mathbf{F}(x, y)$.

Konservativt fält

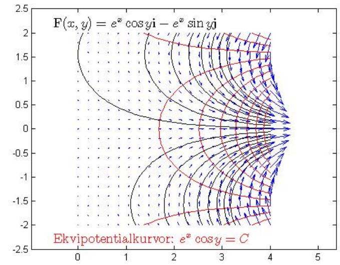
Ett nödvändigt villkor för konservativt vektorfält i planet
Om $\mathbf{F}(x, y,) = f(x, y)\mathbf{i} + g(x, y)\mathbf{j}$ har kontinuerliga partiella derivator och är är konservativt i D så måste gälla att:

$$\frac{\partial}{\partial y} f(x, y) = \frac{\partial}{\partial x} g(x, y)$$

i alla punkter $(x, y) \in D$

Nivåkurvorna $\phi(x, y) = C$ kallas ekvipotentialkurvor till $\mathbf{F}(x, y)$

Fältlinjerna till $\mathbf{F}(x, y)$ är ortogonala mot ekvipotentialkurvorna till $\mathbf{F}(x, y)$



Konservativt fält

Ett vektorfält, $\mathbf{F}(x, y, z) = f(x, y, z)\mathbf{i} + g(x, y, z)\mathbf{j} + h(x, y, z)\mathbf{k}$ med definitionsmängd D, kallas *konservativt* om det finns en funktion $\phi(x, y, z)$ definierad på D, sådan att

$$\nabla\phi(x, y, z) = \mathbf{F}(x, y, z) \text{ för alla } (x, y, z) \in D$$

Funktionen $\phi(x, y, z)$ kallas *potential* till $\mathbf{F}(x, y, z)$.

Nivåytorna $\phi(x, y, z) = C$ kallas ekvipotentialytor till $\mathbf{F}(x, y, z)$

Konservativt fält

Ett nödvändigt villkor för konservativt vektorfält i rummet
Om $\mathbf{F}(x, y, z) = f(x, y, z)\mathbf{i} + g(x, y, z)\mathbf{j} + h(x, y, z)\mathbf{k}$ har kontinuerliga partiella derivator ochär konservativt i D så måste gälla att:

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial y} f(x, y, z) & = & \frac{\partial}{\partial x} g(x, y, z) \\ \frac{\partial}{\partial z} f(x, y, z) & = & \frac{\partial}{\partial x} h(x, y, z) \\ \frac{\partial}{\partial z} g(x, y, z) & = & \frac{\partial}{\partial y} h(x, y, z) \end{cases}$$

i alla punkter $(x, y, z) \in D$

Konservativt fält

Observera att i tillämpningar och i en del matteböcker är ϕ potential till $\mathbf{F}$ om

$$\mathbf{F}(x, y, z) = -\nabla\phi(x, y, z) \text{ för alla } (x, y, z) \in D$$

Följer man fältlinjerna i $\mathbf{F}$:s riktning så *minskar* i så fall potentialen.

Om en partikel faller i ett gravitationsfält så uträttar gravitationen ett arbete, partikels kinetiska energi ökar och dess potentiella energi minskar med motsvarande mängd.
I Adams bok är det tvärtom, potentialfunktionens värde ökar i $\mathbf{F}$:s riktning. Matematiskt sett är det ingen väsentlig skillnad men ett missat minustecken kan vara ödesdigert.

Lärmål

För betyget godkänd skall du kunna:

Adams	Mål
15.3	definiera begreppet *kurvintegral av en funktion* och beräkna sådana integraler genom parametrisering av kurvan.
15.3-6	tillämpa kurv- och ytintegral för att bestämma t.ex. längd, arbete, area, massa, masscentrum laddning och flöde (se t.ex. övn 15.3.9, 15.4.12, 15.5.17, 15.5.20, 15.5.23, 15.6.9, 15.6.11, 15.CR.7).

Lärmål

För högre betyg skall du dessutom kunna:

Adams	Mål
15.3-6	motivera definitionerna av begreppen kurvintegral av funktion/vektorfält, ytintegral av en funktion och flödesintegral (till exempel genom att ge exempel på tillämpning och förklaring av varför integraltypen kan utnyttjas i exemplet).

Kurvintegral

Med *kurvintegralen av* $f(x, y, z)$ över (eller längs) kurvan $\mathcal{C}$ menas integralen

$$\int_{\mathcal{C}} f(x, y, z)ds = \int_a^b f(\mathbf{r}(t)) \left|\mathbf{r}'(t)\right| dt$$

där $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t) \quad a \leq t \leq b$ är en parametrisering av kurvan $\mathcal{C}$.

Kurvintegralens värde beror inte på parametriseringen.

Om en och samma kurva parametriseras på två sätt, $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t) \quad a \leq t \leq b$ och $\mathbf{r} = \tilde{\mathbf{r}}(u) \quad \alpha \leq u \leq \beta$, så ger båda samma värde på kurvintegralen:

$$\int_{\mathcal{C}} f(x, y, z) ds = \int_{\alpha}^{\beta} f(\tilde{\mathbf{r}}(u)) \left|\tilde{\mathbf{r}}'(u)\right| du = \int_{a}^{b} f(\mathbf{r}(t)) \left|\mathbf{r}'(t)\right| dt$$

Lärmål

För betyget godkänd skall du kunna:

Adams	Mål
15.4	definiera begreppet *kurvintegral av ett vektorfält* och beräkna sådana integraler genom parametrisering av kurvan.
15.4	tillämpa satsen om kurvintegralers oberoende av integrationsvägen.
15.3-6	tillämpa kurv- och ytintegral för att bestämma t.ex. längd, arbete, area, massa, masscentrum laddning och flöde (se t.ex. övn 15.3.9, 15.4.12, 15.5.17, 15.5.20, 15.5.23, 15.6.9, 15.6.11, 15.CR.7).

Lärmål

För högre betyg skall du dessutom kunna:

Adams	Mål
15.4	definiera begreppen *område, sammanhängande område* och *enkelt samanhängande område*.
15.4	formulera satsen om kurvintegralers oberoende av integrationsvägen och bevisa att om vektorfältet är konservativt så är kurvintegralen oberoende av integrationsvägen.
15.3-6	motivera definitionerna av begreppen kurvintegral av funktion/vektorfält, ytintegral av en funktion och flödesintegral (till exempel genom att ge exempel på tillämpning och förklaring av varför integraltypen kan utnyttjas i exemplet).

Kurvintegral

Med *kurvintegralen av den tangentiella komponenten av* $\mathbf{F}(x, y, z)$ över (eller längs) kurvan $\mathcal{C}$ menas integralen

$$\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \bullet d\mathbf{r} = \int_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \bullet \hat{\mathbf{T}} ds$$

där $\hat{\mathbf{T}}$ är en enhetstangent till kurvan $\mathcal{C}$.
Men $\hat{\mathbf{T}} ds = \mathbf{r}'(t) dt$ så

$$\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \bullet d\mathbf{r} = \int_{a}^{b} \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \bullet \mathbf{r}'(t) dt$$

Om $\mathbf{F}(x,y,z) = f(x,y,z)\mathbf{i} + g(x,y,z)\mathbf{j} + h(x,y,z)\mathbf{k}$ så skriver man ofta

$$\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \bullet d\mathbf{r} = \int_{\mathcal{C}} f(x,y,z)dx + g(x,y,z)dy + h(x,y,z)dz$$

Om kurvan är sluten kallas ofta kurvintegralen för *cirkulationen* av **F** runt $\mathcal{C}$ och betecknas

$$\oint_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \bullet d\mathbf{r}$$

Definitioner:

- Ett område D kallas *sammanhängande* om varje par av punkter P och Q i D kan bindas samman med en styckvis glatt kurva som ligger helt i D.
- Ett område D kallas *enkelt sammanhängande* om varje *enkel sluten kurva* kan dras samman till en punkt utan att lämna D under sammandragningen.

Definitioner:

- En funktion från $\mathbb{R}$ till $\mathbb{R}$ kallas *smoth – glatt* om den har kontinuerlig derivata.
  En funktion från $\mathbb{R}^n$ till $\mathbb{R}$ kallas glatt om de partiella derivatorna är kontinuerliga.
  En funktion från $\mathbb{R}^n$ till $\mathbb{R}^m$ kallas glatt om komponentfunktionerna är glatta.
- En kurva är *glatt* om den har en glatt parametrisering med derivata $\mathbf{r}'(t) \neq \mathbf{0}$ för alla t. Den är *styckvis glatt* om den kan delas in i ändligt många glatta delar.

Låt D vara ett öppet sammanhängande område och låt **F** vara ett glatt vektorfält definierat på D.
Då är följande tre utsagor ekvivalenta i den meningen att om en av dem är sann (för ett visst vektorfält och ett visst område) så är de andra två också sanna.

(a) **F** är konservativt i D

(b) $\oint_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 0$ för varje sluten styckvis glatt kurva $\mathcal{C}$ i D.

(c) Om $\mathcal{C}_1$ och $\mathcal{C}_2$ är två styckvis glatta kurvor i D med gemensamma start- och slutpunkter så är $\int_{\mathcal{C}_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{\mathcal{C}_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$.

OBS!

Om **F** är konservativt med potential ϕ och $\mathcal{C}$ är en styckvis glatt kurva med startpunkt P_0 och slutpunkt P_1 så är

$$\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \phi(P_1) - \phi(P_0)$$

OBS 2

Med fysikens potentialbegrepp där alltså $-\phi$ är potentialfunktionen har vi istället

$$\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \phi(P_0) - \phi(P_1)$$

Detta stämmer bättre med t.ex. definitionen i NE: *potential*, det arbete som krävs för att förflytta en massenhet, en positiv enhetsladdning eller en magnetisk enhetspol från oändligt avstånd från ett konservativt kraftfälts källor till en punkt i kraftfältet (gravitationsfält, elektrostatiskt eller magnetiskt fält).

Potentialskillnaden enligt NE är det arbete som *krävs* för förflyttningen. Kurvintegralen är det arbete fältet *utför*.

Lärmål

För betyget godkänd skall du kunna:

Adams	Mål
15.5	definiera begreppet *ytintegral av en funktion över en yta* och beräkna sådana integraler då ytan är en parametriserad yta, eller funktionsyta.
15.3-6	tillämpa kurv- och ytintegral för att bestämma t.ex. längd, arbete, area, massa, masscentrum laddning och flöde (se t.ex. övn 15.3.9, 15.4.12, 15.5.17, 15.5.20, 15.5.23, 15.6.9, 15.6.11, 15.CR.7).

Lärmål

För högre betyg skall du dessutom kunna:

Adams	Mål
15.5	beräkna ytintegral av en funktion över en nivåyta (se t.ex. 15.5.4).
15.3-6	motivera definitionerna av begreppen kurvintegral av funktion/vektorfält, ytintegral av en funktion och flödesintegral (till exempel genom att ge exempel på tillämpning och förklaring av varför integraltypen kan utnyttjas i exemplet).

En parametriserad yta i rummet är en kontinuerlig funktion $\mathbf{r}$ definierad på en rektangel $R = \{(uv) : a \leq u \leq b, \quad c \leq v \leq d\}$ (eller annat slutet begränsat område med väldefinierad area) i uv-planet och med värden i $\mathbb{R}^3$:

$$\mathbf{r}(u,v) = x(u,v)\mathbf{i} + y(u,v)\mathbf{j} + z(u,v)\mathbf{k} \quad (u,v) \in R$$

Här tänker vi oftast på $x(u,v)\mathbf{i} + y(u,v)\mathbf{j} + z(u,v)\mathbf{k}$ som koordinaterna för *punkten* (x,y,z). Dessutom uppfattar vi oftast *värdemängden* för $\mathbf{r}(u,v)$ som den parametriserade ytan, inte funktionen själv.

Notera att alla punkter på ytan är randpunkter eftersom ytan är ett tvådimensionellt objekt i $\mathbb{R}^3$. Punkter på ytan som motsvaras av inre punkter i området R kallas trots detta inre punkter på ytan.

Randen till området R avbildas ibland, men inte alltid på en kurva som avgränsar ytan. Den kurvan kallas i så fall för *ytans rand*.

Om ytan beskrivs geometriskt och vi skall hitta/ge en parametrisering av ytan så kräver vi att den (funktionen) skall vara en-entydig utom möjligen på randen till området R.

En yta kallas glatt om det finns ett tangentplan i varje punkt (utom i randpunkterna)

Ytan kallas *styckvis glatt* om den är sammansatt av glatta ytor, "hopklistrade" längs randkurvor.
Definition 5 i boken säger att en punktmängd S i $\mathbb{R}^3$ är en glatt yta om den lokalt är nivåyta till en glatt funktion g med normalvektor $\nabla g \neq \mathbf{0}$.

En parametriserad yta är glatt om funktionen $\mathbf{r} = \mathbf{r}(s,t)$ som ger parametriseringen är glatt och $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial s} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t} \neq \mathbf{0}$ för alla s och t.

Ett infinitesimalt ytelement har arean $dS = \left|\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}\right| dudv$.

En normalvektor till ytan i punkten $\mathbf{r}(u, v)$ ges av

$$\mathbf{n} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} = \frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)}\mathbf{i} + \frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)}\mathbf{j} + \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\mathbf{k}$$

$$\text{Arean av ytan } \mathcal{S} = \iint_{\mathcal{S}} dS = \iint_R \left|\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}\right| dudv$$

Ytintegralen av en funktion $f(x, y, z)$ över ytan $\mathcal{S}$ ges av integralen

$$\iint_S f(x,y,z)dS = \iint_R f(x(uv), y(u,v), z(u,v)) \left|\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}\right| dudv$$

Exempel: en torus

$$\begin{cases} x = (a + b\cos(u))\cos(v) & 0 \le u \le 2\pi \\ y = (a + b\cos(u))\sin(v) & 0 \le v \le 2\pi \\ z = b\sin(u) & b < a \end{cases}$$

beskriver en torus(cykelslang) med hjulradie a och slangradie b.
För denna parametrisering är

$$\begin{cases} \mathbf{r}_u = -b\sin(u)\cos(v)\mathbf{i} - b\sin(u)\sin(v)\mathbf{j} + b\cos(u)\mathbf{k} \\ \mathbf{r}_v = -(a + b\cos(u))\sin(v)\mathbf{i} + (a + b\cos(u))\cos(v)\mathbf{j} + 0\mathbf{k} \\ \mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v = -b(a + b\cos(u))(\cos(u)\cos(v)\mathbf{i} + \cos(u)\sin(v)\mathbf{j} + \sin(u)\mathbf{k}) \end{cases}$$

$$dS = \|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v\| = b(a + b\cos(u))$$

Lärmål

För betyget godkänd skall du kunna:

Adams	Mål
15.6	definiera begreppet *flödesintegral* (flöde av ett vektorfält genom en orienterad yta) och beräkna sådana integraler då ytan är en parametriserad yta eller funktionsyta.
15.3-6	tillämpa kurv- och ytintegral för att bestämma t.ex. längd, arbete, area, massa, masscentrum laddning och flöde (se t.ex. övn 15.3.9, 15.4.12, 15.5.17, 15.5.20, 15.5.23, 15.6.9, 15.6.11, 15.CR.7).

Lärmål

För högre betyg skall du dessutom kunna:

Adams	Mål
15.6	beräkna flödesintegral över en nivåyta (se t.ex. 15.6.2).
15.3-6	motivera definitionerna av begreppen kurvintegral av funktion/vektorfält, ytintegral av en funktion och flödesintegral (till exempel genom att ge exempel på tillämpning och förklaring av varför integraltypen kan utnyttjas i exemplet).

En yta $\mathcal{S}$ kallas *orienterbar* om det finns ett enhetsvektorfält $\hat{\mathbf{N}}(P)$ definierat och kontinuerligt på $\mathcal{S}$ och i varje punkt ortogonalt mot $\mathcal{S}$. Ett vektorfält som uppfyller dettas kallas för *en orientering av* $\mathcal{S}$.

Om $\mathcal{S}$ är en parametriserad yta med $\left|\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}\right| \neq 0$ i alla punkter på ytan, så ger

$$\hat{\mathbf{N}} = \pm \frac{\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}}{\left|\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}\right|}$$

de två möjliga orienteringarna.

Vecka 5 H09
15.1 Vektorfält och skalärfält
15.2 Konservativa vektorfält (t.o.m. exempel 5)
15.3 Kurvintegraler
15.4 Kurvintegral av vektorfält
15.5 Ytor och ytintegraler
15.6 Orienterade ytor och flödesintegraler (normal-ytintegraler)

Exempel: Torusen

Parametriseringen

$$\begin{cases} x = (a + b\cos(u))\cos(v) & 0 \le u \le 2\pi \\ y = (a + b\cos(u))\sin(v) & 0 \le v \le 2\pi \\ z = b\sin(u) & b < a \end{cases} \quad \text{ger}$$

$$\begin{cases} \mathbf{r}_u = -b\sin(u)\cos(v)\mathbf{i} - b\sin(u)\sin(v)\mathbf{j} + b\cos(u)\mathbf{k} \\ \mathbf{r}_v = -(a + b\cos(u))\sin(v)\mathbf{i} + (a + b\cos(u))\cos(v)\mathbf{j} + 0\mathbf{k} \\ \mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v = -b(a + b\cos(u))(\cos(u)\cos(v)\mathbf{i} + \cos(u)\sin(v)\mathbf{j} + \sin(u)\mathbf{k}) \end{cases}$$

För $u = v = 0$ erhålls punkten $(a + b, 0, 0)$ och normalvektorn $\mathbf{r}_u(0,0) \times \mathbf{r}_v(0,0) = -b(a+b)(\mathbf{i} + 0\mathbf{j} + 0\mathbf{k}$, som är inåtriktad. En utåtriktad normalvektor ges alltså av $-\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v = \mathbf{r}_v \times \mathbf{r}_u$.

Carl-Henrik Fant
Adams 15.6, tma043 V5, Ht09

Vecka 5 H09
15.1 Vektorfält och skalärfält
15.2 Konservativa vektorfält (t.o.m. exempel 5)
15.3 Kurvintegraler
15.4 Kurvintegral av vektorfält
15.5 Ytor och ytintegraler
15.6 Orienterade ytor och flödesintegraler (normal-ytintegraler)

Ett vektorfälts *flöde* genom en orienterad yta $\mathcal{S}$ ges av ytintegralen

$$\iint_{\mathcal{S}} \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{N}} dS \quad \text{eller} \quad \iint_{\mathcal{S}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$$

För parametriserade ytor är

$$\iint_{\mathcal{S}} \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{N}} dS = \pm \iint_{R} \mathbf{F}(\mathbf{r}(\mathbf{u}, \mathbf{v})) \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} du dv$$

Val av tecken $\pm$ innebär ett val av riktning i vilken flödet uppfattas positivt.

Carl-Henrik Fant
Adams 15.6, tma043 V5, Ht09

Vecka 5 H09
15.1 Vektorfält och skalärfält
15.2 Konservativa vektorfält (t.o.m. exempel 5)
15.3 Kurvintegraler
15.4 Kurvintegral av vektorfält
15.5 Ytor och ytintegraler
15.6 Orienterade ytor och flödesintegraler (normal-ytintegraler)

Om den orienterade ytan $\mathcal{S}$ är sluten betecknas flödesintegralen ofta

$$\oiint_{\mathcal{S}} \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{N}} dS \quad \text{eller} \quad \oiint_{\mathcal{S}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$$

I detta fall talar man om *in i* $\mathcal{S}$ eller *ut ur* $\mathcal{S}$, beroende på om normalerna pekar inåt eller utåt.
För sfären

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2$$

har vi att $\hat{N} = \frac{x}{R}\mathbf{i} + \frac{y}{R}\mathbf{j} + \frac{z}{R}\mathbf{k}$ är utåtriktad enhetsnormal.
Vektorn $-\hat{N} = \frac{-x}{R}\mathbf{i} + \frac{-y}{R}\mathbf{j} + \frac{-z}{R}\mathbf{k}$ är inåtriktad.

Carl-Henrik Fant
Adams 15.6, tma043 V5, Ht09

Antag parametriseringen är sådan att $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}$ ger rätt orientering.
Då kan flödesintegralen av
$\mathbf{F}(x,y,z) = f(x,y,z)\mathbf{i} + g(x,y,z)\mathbf{j} + h(x,y,z)\mathbf{k}$ skrivas

$$\iint_{\mathcal{S}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \iint_{\mathcal{S}} f(x,y,z)dydz + g(x,y,z)dzdx + h(x,y,z)dxdy =$$

$$\iint_D \left(f(x,y,z)\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)} + g(x,y,z)\frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)} + h(x,y,z)\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \right) dudv$$