TMA043 Flervariabelanalys E2 H09

Carl-Henrik Fant

Matematiska vetenskaper
Chalmers
Göteborgs universitet
tel. (arb) 772 35 57
epost: carl-henrik.fant@chalmers.se

6 oktober 2009

Outline

Lärmål

För betyget godkänd skall du kunna:

Adams	Mål
16.1	beräkna *divergens*, div **F**, och *rotation*, curl **F** för ett vektorfält **F**.

Lärmål

För högre betyg skall du dessutom kunna:

Adams	Mål
16.1	formulera sats 16.1.1 om divergensen som flödestäthet.
16.1	formulera sats 16.1.2 om rotationen som virveltäthet.

Om $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ så definieras gradienten genom:

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\mathbf{k}$$

Man kan se

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z}\mathbf{k}$$

som en operator som verkar på f.

Denna operator ∇, som kallas *nabla*, kan verka även på vektorfält:
Om $\mathbf{F} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ så är $\mathbf{F} = F_1\mathbf{i} + F_2\mathbf{j} + F_3\mathbf{k}$ och

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \mathbf{F} = \nabla \bullet \mathbf{F} &= \left(\frac{\partial}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z}\mathbf{k}\right) \bullet (F_1\mathbf{i} + F_2\mathbf{j} + F_3\mathbf{k}) \\ &= \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z} \end{aligned}$$

Sats 16.1.1, divergensen som källstyrka

Låt D vara en sfär med radie ϵ och centrum i punkten P. Låt $\mathcal{S}$ vara randen med utåtriktad normal. Då gäller enligt divergenssatsen (16.4.8):

$$\iiint_D \operatorname{div} \mathbf{F} dV = \oiint_{\mathcal{S}} \mathbf{F} \bullet \hat{\mathbf{N}} dS$$

och alltså:

$$\operatorname{div} \mathbf{F}(P) = \lim_{\epsilon \to 0} \frac{3}{4\pi\epsilon^3} \oiint_{\mathcal{S}} \mathbf{F} \bullet \hat{\mathbf{N}} dS$$

Ytintegralen kan ses som ”flödet ut ur punkten P”.
div $\mathbf{F}(P)$ tolkas då som “källstyrka per volymsenhet”. (Återkommer i 16.4)

Vi har också:

$$\begin{aligned} \operatorname{curl} \mathbf{F} &= \nabla \times \mathbf{F} = \left(\frac{\partial}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z}\mathbf{k}\right) \times (F_1\mathbf{i} + F_2\mathbf{j} + F_3\mathbf{k}) \\ &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{vmatrix} \\ &= \left(\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z}\right)\mathbf{i} + \left(\frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x}\right)\mathbf{j} + \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right)\mathbf{k} \end{aligned}$$

Sats 16.1.2 Tolkning av rotationen

Låt $\mathcal{S}$ vara en cirkelskiva med radie ϵ och centrum i punkten P och normalvektor $\hat{\mathbf{N}}$.

Låt $\mathcal{C}$ vara randcirkeln genomlöpt moturs sett från spetsen av $\hat{\mathbf{N}}$.

Då gäller enligt Stokes sats (16.5.10):

$$\oint_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \bullet d\mathbf{r} = \iint_{\mathcal{S}} (\operatorname{curl} \mathbf{F}) \bullet \hat{\mathbf{N}} dS \approx \pi\epsilon^2 (\operatorname{curl} \mathbf{F}(P)) \bullet \hat{\mathbf{N}}$$

och alltså:

$$(\operatorname{curl} \mathbf{F}(P)) \bullet \hat{\mathbf{N}} = \lim_{\epsilon \to 0} \frac{1}{\pi\epsilon^2} \oint_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \bullet d\mathbf{r}$$

Tolkning av rotationen

$$(\operatorname{curl} \mathbf{F}(P)) \bullet \hat{\mathbf{N}} = \lim_{\epsilon \to 0} \frac{1}{\pi \epsilon^2} \oint_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \bullet d\mathbf{r}$$

Kurvintegralen kan tolkas som arbetet vektorfältet **F** uträttar då en partikel går runt i den cirkulära banan.
$(\operatorname{curl} \mathbf{F}(P)) \bullet \hat{\mathbf{N}}$ kan alltså ses som fältets förmåga/tendens att få en partikel att rotera kring axeln $\hat{\mathbf{N}}$, förmågan är störst om $\hat{\mathbf{N}}$ är parallell med $(\operatorname{curl} \mathbf{F}(P))$ och obefintlig (0) om de är ortogonala.

Lärmål

För betyget godkänd skall du kunna:

Adams	Mål
16.2	definiera begreppen källfritt (solenoidal) och virvelfritt (irrotational) vektorfält.
16.2	tillämpa sats 16.2.4.

Lärmål

För högre betyg skall du dessutom kunna:

Adams	Mål
16.2	formulera och bevisa sats 16.2.3 g) och h)

Sats 16.2.3

(g) $\nabla \bullet (\nabla \times \mathbf{F}) = 0 \quad (\operatorname{div} \operatorname{curl} = 0)$

(h) $\nabla \times (\nabla f) = \mathbf{0} \quad (\operatorname{curl} \operatorname{grad} = \mathbf{0})$

Definition 16.2.2

Ett vektorfält $\mathbf{F}$ kallas *källfritt*, *divergensfritt*, *eng: solenoidal* i ett område D om $\operatorname{div} \mathbf{F} = 0$ i D.
Ett vektorfält $\mathbf{F}$ kallas *rotationsfritt*, *eng: irrotational* i ett område D om $\operatorname{curl} \mathbf{F} = \mathbf{0}$ i D.
Om $\mathbf{F}$ är konservativt så är $\mathbf{F}$ rotationsfritt (enligt sats 16.2.3(h)).
$\operatorname{curl} \mathbf{F}$ är alltid källfritt (enligt sats 16.2.3(g)).

Sats 16.2.4

Om $\mathbf{F}$ är ett glatt, rotationsfritt vektorfält i ett *enkelt sammanhängande* område D så är $\mathbf{F}$ konservativt.

Lärmål

För betyget godkänd skall du kunna:

Adams	Mål
16.3	tillämpa Greens formel (16.3.6) i relativt okomplicerade situationer.
16.3	beräkna area av område i planet med hjälp av Greens formel

Lärmål

För högre betyg skall du dessutom kunna:

Adams	Mål
16.3	formulera Greens formel (sats 16.3.6) och bevisa den för x- och y-enkla områden.
16.3	tillämpa Greens formel i mer komplicerade situationer.

Definition

Ett område kallas x-enkelt om det begränsas av linjer $y = a$ och $y = d$ i y-led och kurvor $x = g(y)$ och $x = h(y)$ i x-led.

Definition

Ett område kan vara både x-enkelt och y-enkelt:

Det kallas reguljärt område om det kan delas i ändligt många x- och y-enkla delområden.

Sats 16.3.6 Greens formel

Antag att D är ett reguljärt, slutet område vars rand $\mathcal{C}$ består av en eller flera styckvis glatta slutna kurvor utan dubbelpunkter, positivt orienterade relativt D.
Antag också att $\mathbf{F} = F_1(x,y)\mathbf{i} + F_2(x,y)\mathbf{j}$ är ett glatt vektorfält definierat i D.
Då gäller:

$$\oint_{\mathcal{C}} F_1(x,y)dx + F_2(x,y)dy = \iint_D \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right) dA$$

Area som kurvintegral

Antag att $\mathcal{C}$ är den positivt orienterade randen till D. Då gäller:

$$\oint_{\mathcal{C}} xdy = -\oint_{\mathcal{C}} ydx = \frac{1}{2}\oint_{\mathcal{C}} xdy - ydx = \text{ Arean av } D$$

Lärmål

För betyget godkänd skall du kunna:

Adams	Mål
16.4	tillämpa divergenssatsen i relativt okomplicerade situationer.

Vecka 6 H09
16.1 Gradient, divergens, rotation
16.2 Några identiteter
16.3 Greens sats i planet
16.4 Divergenssatsen i ^{3}.
16.5 Stokes sats

Lärmål

För högre betyg skall du dessutom kunna:

Adams	Mål
16.4	formulera och bevisa divergenssatsen (sats 16.4.8) i tre dimensioner för z-enkla områden.
16.4	tillämpa divergenssatsen i mer komplicerade situationer.

CHALMERS | GÖTEBORGS UNIVERSITET
Carl-Henrik Fant Adams 16.4, tma043 V6, Ht09

Vecka 6 H09
16.1 Gradient, divergens, rotation
16.2 Några identiteter
16.3 Greens sats i planet
16.4 Divergenssatsen i ^{3}.
16.5 Stokes sats

Sats 16.4.8 Gauss divergenssats.

Antag att D är ett tredimensionellt reguljärt område vars rand $\mathcal{S}$ är en orienterad sluten yta med enhetsnormal $\hat{\mathbf{N}}$ riktad ut från D. Antag också att $\mathbf{F}$ är ett glatt vektorfält på D. Då gäller:

$$\iiint_D \operatorname{div} \mathbf{F} dV = \oiint_{\mathcal{S}} \mathbf{F} \bullet \hat{\mathbf{N}} dS$$

CHALMERS | GÖTEBORGS UNIVERSITET
Carl-Henrik Fant Adams 16.4, tma043 V6, Ht09

Vecka 6 H09
16.1 Gradient, divergens, rotation
16.2 Några identiteter
16.3 Greens sats i planet
16.4 Divergenssatsen i ^{3}.
16.5 Stokes sats

Tolkning av divergensen

Låt D vara en sfär med radie ϵ och centrum i punkten P. Låt $\mathcal{S}$ vara randen med utåtriktad normal. Då gäller:

$$\iiint_D \operatorname{div} \mathbf{F} dV = \oiint_{\mathcal{S}} \mathbf{F} \bullet \hat{\mathbf{N}} dS$$

och alltså:

$$\operatorname{div} \mathbf{F}(P) = \lim_{\epsilon \to 0} \frac{3}{4\pi\epsilon^3} \oiint_{\mathcal{S}} \mathbf{F} \bullet \hat{\mathbf{N}} dS$$

Ytintegralen kan ses som ”flödet ut ur punkten P”.
div $\mathbf{F}(P)$ tolkas då som “källstyrka per volymsenhet”.

CHALMERS | GÖTEBORGS UNIVERSITET
Carl-Henrik Fant Adams 16.4, tma043 V6, Ht09

Lärmål

För betyget godkänd skall du kunna:

Adams	Mål
	Inga godkäntmål i detta avsnitt.

Lärmål

För högre betyg skall du dessutom kunna:

Adams	Mål
16.5	tillämpa Stokes sats (16.5.10) i relativt okomplicerade situationer.

Sats 16.5.10 Stokes sats

Låt $\mathcal{S}$ vara en styckvis glatt orienterad yta med enhetsnormalvektorfält $\hat{\mathbf{N}}$.

Antag att randen $\mathcal{C}$ till $\mathcal{S}$ består av en eller flera styckvis glatta, slutna kurvor, positivt orienterade relativt orienteringen av $\mathcal{S}$. (Detta innebär ungefär att $\hat{\mathbf{N}} \times \hat{\mathbf{T}}$ pekar in i ytan.)

Antag också att $\mathbf{F}$ är ett glatt vektorfält på en öppen mängd D som innehåller $\mathcal{S}$.

Då gäller:

$$\oint_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \bullet d\mathbf{r} = \iint_{\mathcal{S}} (\operatorname{curl} \mathbf{F}) \bullet \hat{\mathbf{N}} \, dS$$

Tolkning av rotationen

Låt $\mathcal{S}$ vara en cirkelskiva med radie ϵ och centrum i punkten P och normalvektor $\hat{\mathbf{N}}$.

Låt $\mathcal{C}$ vara randcirkeln genomlöpt moturs sett från spetsen av $\hat{\mathbf{N}}$.

Då gäller:

$$\oint_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \bullet d\mathbf{r} = \iint_{\mathcal{S}} (\operatorname{curl} \mathbf{F}) \bullet \hat{\mathbf{N}} \, dS \approx \pi\epsilon^2 (\operatorname{curl} \mathbf{F}(P)) \bullet \hat{\mathbf{N}}$$

och alltså:

$$(\operatorname{curl} \mathbf{F}(P)) \bullet \hat{\mathbf{N}} = \lim_{\epsilon \to 0} \frac{1}{\pi\epsilon^2} \oint_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \bullet d\mathbf{r}$$

Tolkning av rotationen

$$(\operatorname{curl}\mathbf{F}(P))\bullet\hat{\mathbf{N}} = \lim_{\epsilon\to 0}\frac{1}{\pi\epsilon^2}\oint_{\mathcal{C}}\mathbf{F}\bullet d\mathbf{r}$$

Kurvintegralen kan tolkas som arbetet vektorfältet **F** uträttar då en partikel går runt i den cirkulära banan.

$(\operatorname{curl}\mathbf{F}(P))\bullet\hat{\mathbf{N}}$ kan alltså ses som fältets förmåga/tendens att få en partikel att rotera kring axeln $\hat{\mathbf{N}}$, förmågan är störst om $\hat{\mathbf{N}}$ är parallell med $(\operatorname{curl}\mathbf{F}(P))$ och obefintlig (0) om de är ortogonala.