MATEMATIK | **Hjälpmedel: bifogat formelblad, utdelad ordlista, ej räknedosa**
Chalmers tekniska högskola | Datum: 2008-01-18 kl. 08.30–12.30
Tentamen | Telefonvakt:Ragnar Freij
tel. 0762-721860

Flervariabelanalys E2 (tma043)

Tentan rättas och bedöms anonymt. Skriv **tentamenskoden** på samtliga inlämnade papper. Fyll i omslaget ordentligt.
Betygsgränser: 20 - 29 p. ger betyget 3, 30 - 39 p. ger betyget 4 och 40 eller mer betyget 5. (Bonuspoäng från duggor 07/08 inkluderas.)
Lösningar läggs ut på kursens webbsida 21/1. Resultat meddelas via Ladok ca. tre veckor efter tentamenstillfället. Granskning alla vardagar 9-13, MV:s exp.

---

1. Till denna uppgift ska du **endast lämna in svar**, alltså utan motiveringar. **Skriv svaren tydligt och i ordning på** (om möjligt) **ett blad.**

(a) Ange en ekvation till tangentplanet till ytan $4x^2 - y^3 + 2z = 1$ i punkten $(-1, 1, -1)$. (2p)

Lösning/Svar: $8x + 3y - 2z + 3 = 0$

(b) Funktionen $f(x, y)$ har kontinuerliga partiella derivator av första och andra ordningen, f_1, f_2, f_{11}, f_{22} och $f_{12} = f_{21}$. (3p)
Ange de partiella derivatorna $\frac{\partial}{\partial u} f(x(u,v), y(u,v))$ och $\frac{\partial^2}{\partial u^2} f(x(u,v), y(u,v))$ då $x(u,v) = 2u + 5v$ och $y(u,v) = 3u - v$.

Lösning/Svar: $\frac{\partial}{\partial u} f(x(u,v), y(u,v)) = 2f_1(x(u,v), y(u,v)) + 3f_2(x(u,v), y(u,v))$

$\frac{\partial^2}{\partial u^2} f(x(u,v), y(u,v)) = 4f_{11}(x(u,v), y(u,v) + 12f_{12}(x(u,v), y(u,v) + 9_{22} f(x(u,v), y(u,v)$

(c) Ange en integral för beräkning av längden av kurvan (2p)
$x = 2t^2, \quad y = t^3, \quad 0 \le t \le 1.$
Beräkna längden.

Lösning/Svar: $s = \int_0^1 \sqrt{(4t)^2 + (3t^2)^2} dt = \frac{61}{27}$

(d) Beräkna kurvintegralen $\int_C x ds$ då C är kurvan $x = 2t^2, \quad y = t^3, \quad 0 \le t \le 1.$ (2p)

Lösning/Svar: $\frac{1423}{15}$

(e) Beräkna $\iint_D (x - y) dA$ då $D = \{(x, y) : 0 \le x \le 1, \ x \le y \le 1\}$. (2p)

Lösning/Svar: $-\frac{1}{6}$

(f) Ange ett approximativt värde till funktionen $f(x, y) = 3x^3 - 12xy + 2y^2$ i punkten $(1.1, \ 1.01)$ med hjälp av differentialen till f. (2p)

Lösning/Svar: -7.38

(g) Vilken/vilka av punkterna $(0, 0)$, $(15, -5)$, $(-15, 5)$, $(15, 5)$ är kritisk (stationär) punkt för funktionen $f(x, y) = (2x + y^2)^2 + (x + 5y)^2$? (3p)
Ange, för var och en av de kritiska punkterna (bland punkterna ovan), dess karaktär (lokalt max., lokalt min., sadelpunkt).

Till resterande uppgifter skall du **lämna in fullständig lösning**, alltså väl motiverade kalkyler och slutsatser!

2. Bestäm största och minsta värdet av $f(x,y) = \frac{x}{y} + \frac{8}{x} + y$ på triangeln som ges av $0 \le y \le x, \quad 1 \le x \le 8$. (6p)

Lösning/Svar: Felskrivet i uppgiften. Triangeln ges av $1 \le y \le x, \quad 1 \le x \le 8$. Eftersom funktionen inte är definierad för $y = 0$ är gränsen $0 = y$ orimlig. I området $0 < y \le x, \quad 1 \le x \le 8$ har funktionen inget största värde eftersom $f(x,y) -> \infty$ då $(x,y) -> (a, 0+)$. I övrigt ger båda korrigeringarna ungefär samma svårigheter.

$f(x,y)$ har en enda kritisk punkt, $(4,2)$ som ligger i det inre av området. $f(4,2) = 6$.

På triangelns randkurvor, $y = x, \quad 1 \le x \le 8, \quad x = 8, \quad 1 \le y \le 8$ eller $0 < y \le 8$ samt $y = 1, \quad 1 \le x \le 8$ är $f(x,y) = x + \frac{8}{x} + 1$ eller $y = \frac{8}{y} + 1$. Största värdet på respektive randkurva är $f(1,1) = f(1,8) = f(8,8) = 10$. Minsta värdet på resp. randkurva är $f(1, 2\sqrt{2}) = f(8, 2\sqrt{2}) = f(2\sqrt{2}, 2\sqrt{2}) = 4\sqrt{2} + 1 > 6$.

Största värdet på triangeln är alltså 10, minsta är 6.

Med den andra korrigeringen försvinner randkurvan $y = 1, \quad 1 \le x \le 8$. Istället utökas $x = 8, \quad 1 \le y \le 8$ till $x = 8, \quad 0 < y \le 8$ som ger samma minsta värde.

Dessutom tillkommer randkurvan $x = 1, \quad 0 < y \le 1$ där vi har $f(1,y) = \frac{1}{y} + 8 + y$ som är avtagande på intervallet $0 < y \le 1$. Minsta värdet för f på denna kurvan är alltså $f(1,1) = 10$.

Minsta värde på detta område är 6, största värde saknas.

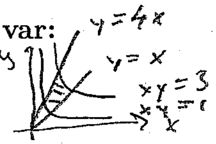
3. Ställ upp en kurvintegral för beräkning av arean av det område i xy-planet som ges av $1 \le xy \le 3, \quad 1 \le \dfrac{y}{x} \le 4, \quad 0 < x, \quad 0 < y$. (8p)

Ställ upp en dubbelintegral för beräkning av samma area.

Beräkna dubbelintegralen med hjälp av substitutionen $u = xy, \quad v = \dfrac{y}{x}$.

Beräkna kurvintegralen genom att parametrisera de olika delarna av randkurvan till området. Du får inte använda Greens formel.

Lösning/Svar:
Området



har hörnen $\begin{cases} xy = 1 \\ y = x \end{cases} \Leftrightarrow (x,y) = (1,1)$ $\quad \begin{cases} xy = 3 \\ y = x \end{cases} (x,y) = (\sqrt{3}, \sqrt{3})$

$\begin{cases} xy = 1 \\ y = 4x \end{cases} \Leftrightarrow (x,y) = (\frac{1}{2}, 2)$ $\quad \begin{cases} xy = 3 \\ y = 4x \end{cases} (x,y) = (\frac{\sqrt{3}}{2}, 2\sqrt{3})$

Randen består av fyra kurvor $\gamma_1 : \begin{cases} x = t \\ y = t \end{cases} \; 1 \xrightarrow{t} \sqrt{3}$, $\quad \gamma_2 : \begin{cases} x = t \\ y = \frac{3}{t} \end{cases} \; \sqrt{3} \xrightarrow{t} \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\gamma_3 : \begin{cases} x = t \\ y = 4t \end{cases} \; \frac{\sqrt{3}}{2} \xrightarrow{t} \frac{1}{2}$ och $\gamma_4 : \begin{cases} x = t \\ y = \frac{1}{t} \end{cases} \; \frac{1}{2} \xrightarrow{t} 1$

Med substitutionen $\begin{cases} u = xy \\ v = \frac{y}{x} \end{cases}$ har vi att området avbildas en-entydigt

på $E : \begin{cases} 1 \le u \le 3 \\ 1 \le v \le 4 \end{cases}$, och $\dfrac{d(u,v)}{d(x,y)} = \begin{vmatrix} y & x \\ -\frac{y}{x^2} & \frac{1}{x} \end{vmatrix} = 2\frac{y}{x} = 2v$

$dA = dxdy = \dfrac{1}{|2v|} dudv = \dfrac{1}{2v} dudv$ då $v > 0$

Arean är $\iint_D dA = \iint_E \frac{1}{2v} dudv = \frac{1}{2}\int_{u=1}^{3} \left(\int_{v=1}^{4} \frac{dv}{v} \right) du = \frac{1}{2} \ln 4 \cdot (3-1) = 2\ln 2$

Med kurvintegral

$A = \int x\,dy = \int_{\gamma_1} x\,dy + \int_{\gamma_2} x\,dy + \int_{\gamma_3} x\,dy + \int_{\gamma_4} x\,dy = \int_1^{\sqrt{3}} t\,dt + \int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{3}/2} t \cdot \frac{-3}{t^2}\,dt + \int_{\frac{\sqrt{3}}{2}}^{\frac{1}{2}} t \cdot 4\,dt + \int_{\frac{1}{2}}^{1} t \cdot \frac{-1}{t^2}\,dt$

4. Beräkna flödet av $\mathbf{F} = (x+y)\mathbf{i} + (y-x)\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ genom ytan $z = x^2 + y^2$, $x^2 + y^2 \le 2$ (4p) med normalriktning uppåt ($\mathbf{k}$-koordinaten positiv).

Lösning/Svar: Med den naturliga parametriseringen $\mathbf{r}: \begin{cases} x = x \\ y = y \\ z = x^2+y^2 \end{cases}$ $x^2+y^2 \le 2$ är $\hat{\mathbf{N}}dS = \pm(\mathbf{r}'_x \times \mathbf{r}'_y)dxdy = (-2x, -2y, 1)\,dxdy$ uppåtriktad.

$\mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{N}}dS = (-(x+y)2x - 2y(y-x) + z)dxdy = (-2x^2 - 2xy - 2y^2 + 2xy + x^2+y^2)dxdy$
$= -(x^2+y^2)dxdy.$

Flödet genom ytan är då $\iint_S \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{N}}dS = \iint_{x^2+y^2 \le 2} -(x^2+y^2)dxdy$

$= \left\{ \begin{matrix} x = r\cos\theta & r \le \sqrt{2} \\ y = r\sin\theta & 0 \le \theta \le 2\pi \end{matrix} \right\} = \iint_{\substack{r \le \sqrt{2} \\ 0 \le \theta \le 2\pi}} -r^2 \cdot r\,dr\,d\theta = -2\pi\left[\frac{r^4}{4}\right]_0^{\sqrt{2}} = -2\pi$

5. Bestäm det största värde kurvintegralen $\oint_\gamma (5x^2y^3 + 3y^5)dx + (5x - 3x^5 - 5x^3y^2)dy$ (4p) kan anta då γ är en sluten kurva, som inte skär sig själv och som genomlöps precis ett varv moturs.

Lösning/Svar: Greens formel ger att
$\oint_\gamma (5x^2y^3+3y^5)dx + (5x-3x^5-5x^3y^2)dy = \iint_D (-(15x^2y^2+15y^4) + (5 - 15x^4 - 15x^2y^2))dxdy$
$= \iint_D (5 - 15(x^2+y^2)^2)dxdy$ där γ är randen till D moturs.

Den senare är maximal om och endast om
$D = \{(x,y) : 5 - 15(x^2+y^2)^2 \ge 0\} = \{(x,y) : x^2+y^2 \le \frac{1}{\sqrt{3}}\}$

Polära koordinater ger
$\oint_\gamma (5x^2y^3+3y^5)dx + (5x-3x^5-5x^3y^2)dy = 5\int_{\theta=0}^{2\pi}\int_{r=0}^{\sqrt[4]{3}} (1-3r^4)r\,dr\,d\theta$

$= 10\pi\left[\frac{r^2}{2} - \frac{r^6}{2}\right]_0^{\frac{1}{\sqrt[4]{3}}} = 5\pi\left(\frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{3\cdot\sqrt{3}}\right) = \frac{10\pi}{3\sqrt{3}}$

6. Avgör vilka av följande påståenden som är sanna respektive falska. Du behöver inte (6p) motivera dig. Rätt svar ger 1p, inget svar 0p och fel svar -1p. Dock ej mindre än 0p totalt.

(a) Eftersom $\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{y}{x^2+y^2}\right) - \dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{x}{x^2+y^2}\right) = 0$ så är
$\oint_C \dfrac{x}{x^2+y^2}dx + \dfrac{y}{x^2+y^2}dy = 0$ för alla slutna kurvor C.

Lösning/Svar: Falskt. Satsen är inte tillämpbar om kurvan går runt origo där funktionen inte är definierad.

(b) Om $\lim_{y\to 0} f(0,y) = 0$ och $\lim_{x\to 0} f(x,kx) = 0$ för alla k så är $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$.

Lösning/Svar: Falskt, det har du sett flera exempel på.

(c) Om $f(x,y)$ har partiella derivator i en punkt (a,b) så är f kontinuerlig i den punkten.

Lösning/Svar: Falskt. Med $f(x,y) = 0$ om $xy = 0$, $f(x,y) = 1$ om $xy \neq 0$ har f partiella derivator i $(0,0)$ men är inte kontinuerlig där.

(d) Antag att vektorfältet $\mathbf{F}(x,y,z)$ har kontinuerliga partiella derivator av andra ordningen. Då gäller att $\operatorname{div}\operatorname{curl}\mathbf{F} = 0$.

Lösning/Svar: Sant. Följer av att de blandade derivatorna av ordning två är lika.

(e) Om kurvan C ges av $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$, $a \xrightarrow{t} b$ och vektorfältet $\mathbf{F}(x,y,z)$ har en potentialfunktion $\Phi(x,y,z)$ i hela $\mathbb{R}^3$ så är $\int_C \mathbf{F}(\mathbf{r}(t))\cdot d\mathbf{r} = \Phi(\mathbf{r}(b) - \Phi(\mathbf{r}(a)$.

Lösning/Svar: Sant.

(f) Det största värdet av $|f_{\mathbf{v}}(a,b)|$, då $\mathbf{v}$ är en enhetsvektor i planet, erhålls då $\mathbf{v}$ tangerar nivåkurvan till f genom punkten (a,b).

Lösning/Svar: Falskt. $|f_{\mathbf{v}}(a,b)|$ är maximal i gradientens riktning, den är normal till nivåkurvan.

7. Definiera/förklara vad det innebär att en funktion är integrerbar över en axelparallell rektangel i planet. Var noga med att definiera/förklara de begrepp du utnyttjar så att det blir en begriplig helhet. (6p)

Formulera och bevisa medelvärdessatsen för dubbelintegraler.