MATEMATIK **Hjälpmedel: bifogat formelblad, ordlistan från kurswebbsidan, ej räknedosa**
Chalmers tekniska högskola Datum: 091024 kl. 8.30–12.30
Tentamen Telefonvakt:
Telefon:

Lösningsförslag till
TMA043 Flervariabelanalys E2 MVE085 Flervariabelanalys V2

Del 1: Godkäntdelen

1. Till nedanstående uppgifter skall korta lösningar redovisas, samt svar anges, på anvisad plats(endast lösningar och svar på detta blad, och på anvisad plats, beaktas.

(a) Bestäm en ekvation för tangentplanet i punkten $(1, 0, -1)$ till nivåytan $xe^y + x^2z - yz^2 = 0$. (2p)

Lösning: $g(x, y, z) = xe^y+x^2z-yz^2$. Då är $g_1(x, y, z) = e^y+2xz$, $g_2(x, y, z) = xe^y-z^2$ och $g_3(x, y, z) = x^2 - 2yz$. Då är $\nabla g(1, 0, -1) = -1\mathbf{i} + 0\mathbf{j} + 1\mathbf{k}$ och tangentplanets ekvation $-1(x - 1) + 0(y - 0) + 1(z + 1) = 0$

Svar: Tangentplanets ekvation är $x - z = 2$

(b) Förklara vad som menas med att en funktion $f(x, y)$ är kontinuerlig i punkten (a, b). (3p)

Funktionen f ges av $f(x,y) = \begin{cases} 2x^2 + y & \text{då} \quad (x, y) \neq (2, 1) \\ 1 & \text{då} \quad (x, y) = (2, 1) \end{cases}$.

Är f kontinuerlig i punkten $(2, 1)$? Motivera ditt svar.

Förklaring, svar och motivering: f är kontinuerlig i (a, b) om $(a, b) \in D_f$ och $f(x, y) \to f(a, b)$ då $(x, y) \to (a, b)$

f är inte kontinuerlig i $(2, 1)$ eftersom $2x^2 + y \to 9 \neq 1 = f(2, 1)$ då $(x, y) \to (2, 1)$

(c) Bestäm taylorpolynomet av grad 2 till $f(x, y) = \sin(x + y) + \cos(x - y)$ i punkten $(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4})$. (3p)
Utnyttja detta för att beräkna ett närmevärde till $f(\frac{\pi}{4} + 0.1, \frac{\pi}{4} - 0.2)$

Lösning: $f_1(x, y) = \cos(x + y) - \sin(x - y)$, $f_2(x, y) = \cos(x + y) + \sin(x - y)$, $f_{11}(x, y) = -\sin(x + y) - \cos(x - y)$, $f_{12}(x, y) = -\sin(x + y) + \cos(x - y)$, $f_{22}(x, y) = -\sin(x + y) - \cos(x - y)$

$f(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}) = 2$, $f_1(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}) = 0$, $f_2(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}) = 0$, $f_{11}(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}) = -2$, $f_{12}(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}) = 0$, $f_{22}(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}) = -2$

$P_2(x, y) = f(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}) + f_1(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4})(x - \frac{\pi}{4}) + f_2(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4})(y - \frac{\pi}{4}) + \frac{1}{2}(f_{11}(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4})(x - \frac{\pi}{4})^2 + 2f_{12}(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4})(x - \frac{\pi}{4})(y - \frac{\pi}{4}) + f_{22}(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4})(y - \frac{\pi}{4})^2) = 2 - (x - \frac{\pi}{4})^2 - (y - \frac{\pi}{4})^2$

$f(\frac{\pi}{4} + 0.1, \frac{\pi}{4} - 0.2) \approx P_2(\frac{\pi}{4} + 0.1, \frac{\pi}{4} - 0.2) = 2 - 0.01 - 0.04 = 1.95$

Svar: $P_2(x, y) = 2 - (x - \frac{\pi}{4})^2 - (y - \frac{\pi}{4})^2$, $f(\frac{\pi}{4} + 0.1, \frac{\pi}{4} - 0.2) \approx 1.95$

(d) Beräkna flödet av $\mathbf{F} = xy\mathbf{i} + yz\mathbf{j} + xz\mathbf{k}$ ut ur kuben $0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq 1,\ 0 \leq z \leq 1$. (3p)

Lösning:

Flödet $= \oiint_{\mathcal{S}} \mathbf{F}\bullet\hat{\mathbf{N}}\,dS = \iiint_K \operatorname{div}\mathbf{F}\,dV = \int_0^1 \left(\int_0^1 \left(\int_0^1 (y + z + x)\,dx\right) dy\right) dz = \frac{3}{2}$

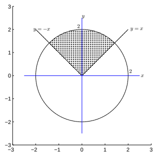
Alternativt:

Flödet $= \oiint_{\mathcal{S}} \mathbf{F}\bullet\hat{\mathbf{N}}\,dS = \iint_{\mathcal{S}_1,x=0} \mathbf{F}\bullet(-\mathbf{i})\,dS + \iint_{\mathcal{S}_2,y=0} \mathbf{F}\bullet(-\mathbf{j})\,dS + \iint_{\mathcal{S}_3,z=0} \mathbf{F}\bullet(-\mathbf{k})\,dS + \iint_{\mathcal{S}_4,x=1} \mathbf{F}\bullet\mathbf{i}\,dS + \iint_{\mathcal{S}_5,y=1} \mathbf{F}\bullet\mathbf{j}\,dS + \iint_{\mathcal{S}_6,z=1} \mathbf{F}\bullet\mathbf{k}\,dS = \iint_{\mathcal{S}_1,x=0} 0\,dS + \iint_{\mathcal{S}_2,y=0} 0\,dS + \iint_{\mathcal{S}_3,z=0} 0\,dS + \iint_{\mathcal{S}_4,x=1} y\,dS + \iint_{\mathcal{S}_5,y=1} z\,dS + \iint_{\mathcal{S}_6,z=1} x\,dS = \frac{3}{2}$

Svar: Flödet $= \oiint_{\mathcal{S}} \mathbf{F}\bullet\hat{\mathbf{N}}\,dS = \frac{3}{2}$

(e) Skissa området $D: \; x^2+y^2 \leq 4, \; |x| \leq y$ och beräkna dubbelintegralen $\iint_D y\,dxdy$ (polära koordinater underlättar). (3p)

Lösning:



$$\iint_D y\,dA = \int_{\theta=\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \int_{r=0}^{2} r\sin\theta r\,drd\theta = [-\cos\theta]\left[\frac{r^3}{3}\right]_0^2 = \sqrt{2}\frac{8}{3}$$

Svar:

Till följande uppgifter skall fullständiga lösningar inlämnas. **Endast svar ger inga poäng**. Motivera och förklara så väl du kan.

2. Bestäm största och minsta värde av funktionen $f(x,y) = x^2+2y^2-x$ på cirkelskivan $x^2+y^2 \leq 1$. (6p)

Lösning: Det finns största och minsta värde eftersom funktionen är kontinuerlig och cirkelskivan är sluten och begränsad. Dessa värden kan antas i punkter i det inre av skivan, där $\nabla f(a,b) = \mathbf{0}$, och på randen av skivan.

$f_1(x,y) = 2x-1, \; f_2(x,y) = 4y$. enda kritiska punkten är $(\frac{1}{2},0)$. $f(\frac{1}{2},0) = -\frac{1}{4}$.

På randen är $y^2 = 1-x^2$ och $f(x,y) = g(x) = 2-x^2-x$ där $-1 \leq x \leq 1$. $g'(x) = -2x-1 = 0$ för $x = -\frac{1}{2}$. $g(-\frac{1}{2}) = \frac{9}{4}$, $g(-1) = 2$, $g(1) = 0$. Minsta funktonsvärdet på randen är alltså 0, största är $\frac{9}{4}$.

Svar: Minsta värdet på cirkelskivan är $-\frac{1}{4}$, största är $\frac{9}{4}$.

3. D är den stympade konen, som begränsas av den koniska ytan $z = \sqrt{x^2+y^2}$ och planen $z=1$ samt $z=4$. (6p)

Beräkna massan av kroppen D och masscentrum (se formelbladet) till D då densiteten i punkten (x,y,z) är $\delta(x,y,z) = z^{-2}$

Lösning: Konens massa $m = \iiint_D \delta(x,y,z)\,dV = \iiint_D z^{-2}\,dV = \int_{z=1}^{z=4}\left(\iint_{D_z} z^{-2}\,dxdy\right)dz$, där D_z är snittet mellan konen och ett plan z =konstant. Detta snitt är en cirkelskiva med radie z

Alltså är massan $m = \int_{z=1}^{z=4}\left(z^{-2}\iint_{D_z}\,dxdy\right)dz = \int_{z=1}^{z=4} z^{-2}\text{arean av}(D_z)dz = \int_{z=1}^{z=4} z^{-2}\pi z^2\,dz = \int_{z=1}^{z=4}\pi\,dz = 3\pi$

Av symmetriskäl är masscentrum en punkt $(0,0,\hat{z})$ på z-axeln.

$\hat{z} = \frac{1}{m}\iiint_D z\delta(x,y,z)\,dV = \frac{1}{m}\int_{z=1}^{z=4}\left(\iint_{D_z} z\cdot z^{-2}\,dxdy\right)dz = \frac{1}{m}\int_{z=1}^{z=4} z^{-1}\text{arean av}(D_z)dz = \frac{1}{m}\int_{z=1}^{z=4} z^{-1}\pi z^2\,dz = \frac{1}{m}\int_{z=1}^{z=4}\pi z\,dz = \frac{1}{m}\left[\pi\frac{z^2}{2}\right]_1^4 = \frac{15\pi}{6\pi} = \frac{5}{2}$

Svar: Massan är 3π (massenheter), masscentrum är $(0,0,\frac{5}{2})$.

4. En partikel rör sig i xy-planet utefter kurvan $\mathcal{C}$ under påverkan av kraftfältet

$\mathbf{F}(x,y) = y\mathbf{i} - x\mathbf{j}$. Kurvan $\mathcal{C}$ går från $(1,0)$ till $(1,-2\pi)$ och ges av

$\mathbf{r}(t) = (\cos t + t\sin t)\mathbf{i} + (\sin t - t\cos t)\mathbf{j}, \quad 0 \xrightarrow{t} 2\pi.$

(a) Är $\mathbf{F}$ ett konservativt vektorfält i xy-planet? (motivera ditt svar!). (1p)

(b) Beräkna arbetet som kraftfältet $\mathbf{F}$ utför på partikeln då den rör sig utefter kurvan $\mathcal{C}$. (3p)

(c) Beräkna kurvintegralen $\int_{\mathcal{C}}(x^2+y^2)\,ds$. (2p)

Lösning:

(a) Eftersom $\frac{\partial(-x)}{\partial x} = -1 \neq 1 = \frac{\partial(y)}{\partial y}$ så är $\mathbf{F}$ inte ett konservativt vektorfält i xy-planet.

(b) Arbetet som kraftfältet $\mathbf{F}$ utför på partikeln ges av kurvintegralen $\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \bullet d\mathbf{r}$.

Med $\mathbf{r}(t) = (\cos t + t\sin t)\mathbf{i} + (\sin t - t\cos t)\mathbf{j}, \quad 0 \xrightarrow{t} 2\pi$ är
$d\mathbf{r} = \mathbf{r}'(t)dt = ((-\sin t + \sin t + t\cos t)\mathbf{i} + (\cos t - \cos t + t\sin t)\mathbf{j})dt =$
$(t\cos t\mathbf{i} + t\sin t\mathbf{j})dt$ och
$\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \bullet d\mathbf{r} = \int_0^{2\pi} ((\sin t - t\cos t)\mathbf{i} - (\cos t + t\sin t)\mathbf{j})(t\cos t\mathbf{i} + t\sin t\mathbf{j})dt =$
$\int_0^{2\pi} ((\sin t - t\cos t)t\cos t - (\cos t + t\sin t)t\sin t)dt =$
$\int_0^{2\pi} (t\cos t\sin t - t^2\cos^2 t - t\sin t\cos t - t^2\sin^2 t)dt = \int_0^{2\pi} -t^2\, dt = -\frac{(2\pi)^3}{3} = -\frac{8\pi^3}{3}$

(c) Med $x = \cos t + t\sin t$ och $y = \sin t - t\cos t$ är
$x^2 + y^2 = (\cos t + t\sin t)^2 + (\sin t - t\cos t)^2 = 1 + t^2$ och
$ds = \|\mathbf{r}'(t)\|\, dt = \sqrt{(t\cos t)^2 + (t\sin t)^2}dt = |t|$.
Då är $\int_{\mathcal{C}} (x^2 + y^2)\, ds = \int_0^{2\pi} (1 + t^2)t\, dt = \left[\frac{t^2}{2} + \frac{t^4}{4}\right]_0^{2\pi} = 2\pi^2 + 4\pi^4$.

Svar: a) Nej, (se ovan), b) $\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \bullet d\mathbf{r} = -\frac{8\pi^3}{3}$, c) $\int_{\mathcal{C}} (x^2 + y^2)\, ds = 2\pi^2 + 4\pi^4$

Del 2: Överbetygsdelen

5. Låt $\mathcal{C}$ vara randkurvan till paraboloiden $z = x^2 + y^2,\ 0 \le z \le 4$ orienterad moturs sett uppifrån (t.ex. från punkten $(0, 0, 8)$). Använd Stokes sats för att beräkna kurvintegralen $\oint_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \bullet d\mathbf{r}$ då $\mathbf{F} = (y^2 + y)z\mathbf{i} + (2y - 1)xz\mathbf{j} + xy^2\mathbf{k}$. (6p)

Lösning: $\operatorname{curl} \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ (y^2 + y)z & (2y - 1)xz & xy^2 \end{vmatrix} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} - 2z\mathbf{k}$

Enligt Stokes sats är $\oint_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \bullet d\mathbf{r} = \iint_{\mathcal{S}} \operatorname{curl} \mathbf{F} \bullet d\mathbf{S}$ där $\mathcal{S}$ är vilken yta som helst som har $\mathcal{C}$ till rand och har uppåtriktad normal. Det finns här två naturliga kandidater för $\mathcal{S}$, dels den plana cirkelskivan $x^2 + y^2 \le 4,\ z = 4$ med enhetsnormalvektor $\mathbf{k}$, dels paraboloiden $z = x^2 + y^2,\ 0 \le z \le 4$ med normalvektor (ej enhetsvektor) $-2x\mathbf{i} - 2y\mathbf{j} + \mathbf{k}$. Man kan tänka sig många andra alternativa ytor. Valet av yta görs lämpligen så att flödesintegralen blir så enkel som möjligt.

Med $\mathcal{S}$ = cirkelskivan och D projektionen av denna på xy-planet är $\iint_{\mathcal{S}} \operatorname{curl} \mathbf{F} \bullet d\mathbf{S} =$
$\iint_D (x\mathbf{i} + y\mathbf{j} - 2z\mathbf{k}) \bullet \mathbf{k}\, dxdy = \iint_D -2z\, dxdy = \iint_D -8\, dxdy = -8 \cdot 2^2\pi = -32\pi$

Med $\mathcal{S}$ = paraboloiden och D projektionen av denna på xy-planet är $\iint_{\mathcal{S}} \operatorname{curl} \mathbf{F} \bullet d\mathbf{S} =$
$\iint_D (x\mathbf{i} + y\mathbf{j} - 2z\mathbf{k}) \bullet (-2x\mathbf{i} - 2y\mathbf{j} + \mathbf{k})\, dxdy = \iint_D (-2x^2 - 2y^2 - 2z)\, dxdy =$
$\iint_D (-2x^2 - 2y^2 - 2(x^2 + y^2))\, dxdy = \iint_D -4(x^2 + y^2)\, dxdy = \iint_{r \le 2,\ 0 \le \theta \le 2\pi} -4r^2\, r dr d\theta =$
-32π

Svar: $\oint_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \bullet d\mathbf{r} = -32\pi$

6. Bestäm de punkter på skärningskurvan mellan konen $z^2 = x^2 + y^2$ och planet $z = x + y + 2$ som ligger närmast origo. Bestäm också de som ligger längst ifrån origo. (6p)

Lösning: De sökta punkterna är de där avståndet, eller dess kvadrat, är minst respektive störst. Alltså där funktionen $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ har minsta respektive största värde under bivillkoren $x^2 + y^2 - z^2 = 0$ och $x + y + 2 - z = 0$.

Bilda funktionen $L(x, y, z, \lambda, \mu) = x^2 + y^2 + z^2 + \lambda(x^2 + y^2 - z^2) + \mu(x + y + 2 - z)$.

De sökta punkterna är kritiska punkter för L. Dessa är lösningar till ekvationssystemet:

$$\begin{cases} 2x+\lambda 2x+\mu &= 0\\ 2y+\lambda 2y+\mu &= 0\\ 2z-\lambda 2z-\mu &= 0\\ x^2+y^2-z^2 &= 0\\ x+y+2-z &= 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+\lambda 2x+\mu &= 0\\ 2(y-x)+\lambda 2(y-x) &= 0\\ 2(z+x)-\lambda 2(z-x) &= 0\\ x^2+y^2-z^2 &= 0\\ x+y+2-z &= 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+\lambda 2x+\mu &= 0\\ (y-x)(1+\lambda) &= 0\\ (z+x)-\lambda(z-x) &= 0\\ x^2+y^2-z^2 &= 0\\ x+y+2-z &= 0\end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} 2x+\lambda 2x+\mu &= 0\\ y &= x\\ (z+x)-\lambda(z-x) &= 0\\ x^2+y^2-z^2 &= 0\\ x+y+2-z &= 0\end{cases} \text{eller} \begin{cases} 2x+\lambda 2x+\mu &= 0\\ \lambda &= -1\\ (z+x)-\lambda(z-x) &= 0\\ x^2+y^2-z^2 &= 0\\ x+y+2-z &= 0\end{cases}$$

Det andra ekvationssystemet saknar lösning eftersom $\lambda = -1 \Rightarrow z = 0 \Rightarrow x\ 2 + y^2 = 0 \Rightarrow x = y = 0 \rightarrow x + y + 2 - z \neq 0$

I det första ekvationssystemet är första och tredje ekvationerna ointressanta eftersom vi inte är intresserade av λ eller μ. Vi har då:

$$\begin{cases} y &= x\\ z^2 &= 2x^2\\ z &= 2x+2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y &= x\\ z &= \sqrt{2}x\\ (2-\sqrt{2})x &= -2\end{cases} \text{eller} \begin{cases} y &= x\\ z &= -\sqrt{2}x\\ (2+\sqrt{2})x &= -2\end{cases}$$

Det första av dessa ger punkten $(x_1, x_1, \sqrt{2}x_1)$ där $x_1 = \frac{-2}{2-\sqrt{2}}$, det andra ger punkten $(x_2, x_2, -\sqrt{2}x_2)$ där $x_2 = \frac{-2}{2+\sqrt{2}}$

För att förenkla svaret kan man skriva om $x_1 = \frac{-2}{2-\sqrt{2}} = \frac{-2(2+\sqrt{2})}{(2-\sqrt{2})(2+\sqrt{2})} = \frac{-2(2+\sqrt{2})}{4-2} = -2-\sqrt{2}$.

De två kritiska punkterna är alltså: $(-2-\sqrt{2}, -2-\sqrt{2}, -2-2\sqrt{2})$ och $(-2+\sqrt{2}, -2+\sqrt{2}, -2+2\sqrt{2})$.

Avståndet från origo till punkterna är $\sqrt{x^2+y^2+z^2} = \sqrt{x^2+x^2+2x^2} = 2\,|x|$.

Svar: Den mest avlägsna punkten är $(-2-\sqrt{2}, -2-\sqrt{2}, -2-2\sqrt{2})$ som ligger på avståndet $2(2+\sqrt{2})$ från origo. Den närmsta punkten är $(-2+\sqrt{2}, -2+\sqrt{2}, -2+2\sqrt{2})$ på avståndet $2(2-\sqrt{2})$.

7. Definiera begreppen gradient och riktningsderivata för en funktion av två variabler. Bevisa sedan dels att $D_{\mathbf{u}}f(a,b) = \mathbf{u}\bullet\nabla f(a,b)$ och dels att i punkten (a,b) växer $f(x,y)$ snabbast i riktningen $\nabla f(a,b)$. (6p)