MATEMATIK **Hjälpmedel: bifogat formelblad, ordlistan från kurswebbsidan, ej räknedosa**

Chalmers tekniska högskola Datum: 100115 kl. 8.30–12.30

Tentamen Telefonvakt: Oscar Marmon

Telefon: 0703 088 304

Lösningsförslag till TMA043,

Tentan rättas och bedöms anonymt. **Skriv tentamenskoden tydligt på placeringlista och samtliga inlämnade papper.** Fyll i omslaget ordentligt.
För godkänt på tentan krävs 25 poäng på tentamens första del (godkäntdelen) Bonuspoäng från duggor 09/10 räknas med, men maximal poäng på denna del är 32. För godkänt på kursen skall också Matlabmomentet vara godkänt. För betyg 4 eller 5 krävs dessutom 33 resp. 42 poäng sammanlagt på tentamens två delar.
Lösningar läggs ut på kursens webbsida första vardagen efter tentamensdagen. Resultat meddelas via Ladok ca. tre veckor efter tentamenstillfället. Första granskningstillfälle meddelas på kurswebbsidan, efter detta sker granskning alla vardagar 9-13, MV:s exp.

Del 1: Godkäntdelen

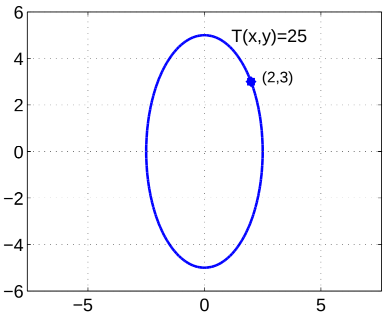
1. Denna uppgift finns på separat blad på vilket lösningar och svar skall skrivas. **Lösgör bladet och lämna in det som blad 1 tillsammans med övriga lösningar.** (14p)

Till följande uppgifter skall fullständiga lösningar inlämnas. **Endast svar ger inga poäng**. Motivera och förklara så väl du kan.

2. Temperaturen $T(x,y)$ (mätt i $°C$) i punkter i xy-planet ges av $T(x,y) = 4x^2 + y^2$. (6p)

(a) Skissa den nivåkurva $T(x,y) = k$, som går genom punkten $(2,3)$.

Skiss:



(b) I vilken riktning från $(2,3)$ ökar temperaturen snabbast?

Lösning: Temperaturen öker snabbast i gradientens riktning (i punkten). Vi har $\nabla T(x,y) = 8x\mathbf{i} + 2y\mathbf{j}$ och speciellt är $\nabla T(2,3) = 16\mathbf{i} + 6\mathbf{j}$

Svar: Temperaturen ökar snabbast i riktningen $16\mathbf{i} + 6\mathbf{j}$ från $(2,3)$

(c) Hur stor är temperaturökningshastigheten (i grader per längdenhet) i punkten $(2,3)$ i riktningen du angav ovan?

Lösning: Temperaturökningshastigheten (i grader per längdenhet) i en given riktning $\mathbf{v}$, där $||\mathbf{v}|| = 1$, ges av riktningsderivatan $D_{\mathbf{v}}T(2,3)$. Som vi noterade i deluppgift b så är den som störst i gradientens riktning dvs. då $\mathbf{v} = \frac{\nabla T(2,3)}{||\nabla T(2,3)||}$ och i den riktningen är ökningen $D_{\mathbf{v}}T(2,3) = ||\nabla T(2,3)|| = ||16\mathbf{i} + 6\mathbf{j}|| = 2\sqrt{8^2 + 3^2} = 2\sqrt{73}$

Svar: $2\sqrt{73}$ $\quad(°C/l.e.)$

(d) Bestäm temperaturökningshastigheten (i grader per tidsenhet) vid en förflyttning med farten 3 (längdenhet per tidsenhet) från punkten $(2,3)$ i riktningen som ges av $\mathbf{v} = 3\mathbf{i} - 4\mathbf{j}$.

Lösning: Temperaturökningshastigheten (i grader per tidsenhet) vid förflyttning med en given hastighet $\mathbf{v}$ (ej nödvändigtvis av enhetslängd) i punkten $(2,3)$ ges av $D_{\mathbf{v}}T(2,3)$. Om farten är 3 och riktningen ges av $3\mathbf{i} - 4\mathbf{j}$ så är hastigheten $\mathbf{v} = 3\frac{3\mathbf{i}-4\mathbf{j}}{||3\mathbf{i}-4\mathbf{j}||} = \frac{3}{5}(3\mathbf{i} - 4\mathbf{j})$ och temperaturökningen blir

$$D_{\mathbf{v}}T(2,3) = \nabla T(2,3)\bullet\frac{3}{5}(3\mathbf{i} - 4\mathbf{j}) = \frac{3}{5}(16\mathbf{i} + 6\mathbf{j})\bullet(3\mathbf{i} - 4\mathbf{j}) = \frac{3}{5}24 = \frac{72}{5}$$

Alternativt kan vi resonera i stil med följande: Om vi förflyttar oss genom punkten $(2,3)$ i riktningen $\mathbf{u} = 3\mathbf{i} - 4\mathbf{j}$ och med farten 1 (längdenhet per tidsenhet) så kommer temperaturökningshastigheten mätt i grader per tidsenhet vara samma som temperaturökningshastigheten mätt i grader per längdenhet, vilket ges av

$$D_{\mathbf{u}/||\mathbf{u}||}T(2,3) = \nabla T(2,3)\bullet\frac{3\mathbf{i} - 4\mathbf{j}}{||3\mathbf{i} - 4\mathbf{j}||} = (16\mathbf{i} + 6\mathbf{j})\bullet\frac{1}{5}(3\mathbf{i} - 4\mathbf{j}) = \frac{24}{5}$$

Om vi förflyttar oss tre gånger så snabbt genom punkten $(2,3)$ så kommer också temperaturökningshastigheten i punkten att vara tre gånger så stor dvs. $3\frac{24}{5} = \frac{72}{5}$

Svar: $\frac{72}{5}$ $\quad(°C/t.e.)$

(e) Ange en parametriserad kurva (en rät linje duger) som går genom punkten $(2,3)$ och där har farten 3 och hastighetsvektorn parallell med $3\mathbf{i} - 4\mathbf{j}$.

Lösning: För varje växande funktion $f(t)$ med värdemängden $\mathbb{R}$ så är $\mathbf{r}(t) = (2,3) + f(t)(3\mathbf{i} - 4\mathbf{j})$ en parametrisering av den räta linjen genom $(2,3)$ med riktningen $3\mathbf{i} - 4\mathbf{j}$. Villkoret att farten skall vara 3 i punkten $\mathbf{r}(t_0) = (2,3)$ innebär att $3 = ||\mathbf{r}'(t_0)|| = |f'(t_0)| \cdot ||3\mathbf{i} - 4\mathbf{j}|| = |f'(t_0)| \cdot 5$. Detta blir t.ex. uppfyllt med $f(t) = \frac{3}{5}t$, för vilket vi får $\mathbf{r}(t) = (2,3) + \frac{3}{5}t(3\mathbf{i} - 4\mathbf{j}) = (2 + \frac{9}{5}t, 3 - \frac{12}{5}t)$

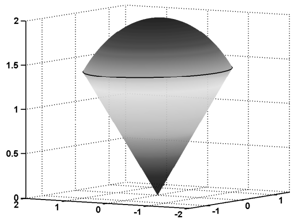
Svar: t.ex. $\mathbf{r}(t) = (2 + \frac{9}{5}t, 3 - \frac{12}{5}t), t \in \mathbb{R}$

3. Beräkna massan

$$m = \iiint_D (x^2 + y^2 + z^2)\, dV$$

och masscentrums z-koordinat

$$\bar{z} = \frac{1}{m}\iiint_D z(x^2 + y^2 + z^2)\, dV$$



(6p)

då D är kroppen som ges av $\sqrt{x^2 + y^2} \le z,\ x^2 + y^2 + z^2 \le 4$ och densiteten $\delta(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$. (Sfärisk substitution rekommenderas.)

Lösning: I sfäriska koordinater (ρ, ϕ, θ), där

$$\begin{cases} x = \rho\sin\phi\cos\theta \\ y = \rho\sin\phi\sin\theta \\ z = \rho\cos\phi \end{cases}$$

beskrivs området D av att $0 < \rho \le 2, 0 \le \phi \le \frac{\pi}{4}, 0 \le \theta < 2\pi$.
Volymelementet i sfäriska koordinater är $dV = \rho^2 \sin\phi d\rho d\phi d\theta$ så om vi övergår till sfäriska

koordinater i trippelintegralen som ger massan så får vi;

$$m = \iiint_D (x^2+y^2+z^2)dV = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/4}\int_0^2 \rho^2\rho^2\sin\phi d\rho d\phi d\theta =$$

$$= 2\pi\left[-\cos\phi\right]_0^{\pi/4}\left[\frac{\rho^5}{5}\right]_0^2 = \frac{64\pi}{5}\left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

På liknande sätt får vi;

$$\iiint_D z(x^2+y^2+z^2)dV = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/4}\int_0^2 \rho\cos\phi\rho^2\rho^2\sin\phi d\rho d\phi d\theta = 2\pi\left[\frac{\sin^2\phi}{2}\right]_0^{\pi/4}\left[\frac{\rho^6}{6}\right]_0^2 = \frac{16\pi}{3}$$

så z-koordinaten för kroppens masscentrum är

$$\bar{z} = \frac{1}{m}\iiint_D z(x^2+y^2+z^2)dV = \frac{5}{64\pi\left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)}\frac{16\pi}{3} = \frac{5}{12\left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)}$$

Svar: $m = \dfrac{64\pi}{5}\left(1-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$ och $\bar{z} = \dfrac{5}{12\left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)}$

4. $\mathcal{S}$ är halvsfären $z = \sqrt{4-x^2-y^2}$, $x^2+y^2 \leq 4$, med uppåtriktad normalvektor. Beräkna ytintegralen $\iint_{\mathcal{S}} z^2\, dS$. (6p)

Lösning: Om vi betraktar halvsfären som en funktionsyta $z = f(x,y)$ till funktionen $f(x,y) = \sqrt{4-x^2-y^2}$, där $x^2+y^2 \leq 4$, så ges ytelementet av;

$$dS = \sqrt{1+f_1^2+f_2^2}dxdy = \sqrt{1+\left(\frac{-x}{\sqrt{4-x^2-y^2}}\right)^2+\left(\frac{-y}{\sqrt{4-x^2-y^2}}\right)^2}dxdy =$$

$$= \sqrt{1+\frac{x^2}{4-x^2-y^2}+\frac{x^2}{4-x^2-y^2}}dxdy = \sqrt{\frac{4}{4-x^2-y^2}}dxdy = \frac{2}{\sqrt{4-x^2-y^2}}dxdy$$

Detta ger oss;

$$\iint_{\mathcal{S}} z^2\, dS = \iint_{x^2+y^2<4}(4-x^2-y^2)\frac{2}{\sqrt{4-x^2-y^2}}dxdy = 2\iint_{x^2+y^2<4}\sqrt{4-x^2-y^2}dxdy$$

Om vi byter till polära koordinater så får vi;

$$\iint_{\mathcal{S}} z^2\, dS = 2\int_0^{2\pi}\int_0^2\sqrt{4-r^2}rdrd\theta = 2\pi\left[-\frac{(4-r^2)^{3/2}}{3/2}\right]_0^2 = \frac{32\pi}{3}$$

Alternativt kan vi beräkna ytintegralen genom att parametrisera ytan m.h.a. sfäriska koordinater. Halvsfären beskrivs då av;

$$\begin{cases} x = 2\sin\phi\cos\theta \\ y = 2\sin\phi\sin\theta \\ z = 2\cos\phi \end{cases}, \quad 0 \leq \phi \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq \theta < 2\pi$$

Ytelementet beskrivet med parametrarna ϕ,θ är $dS = 2^2\sin\phi d\phi d\theta$ vilket ger oss;

$$\iint_{\mathcal{S}} z^2\, dS = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/2} 4\cos^2\phi 4\sin\phi d\phi d\theta = 32\pi\left[-\frac{\cos^3\phi}{3}\right]_0^{\pi/2} = \frac{32\pi}{3}$$

Svar: $\dfrac{32\pi}{3}$

Del 2: Överbetygsdelen

Endast om man ligger enstaka poäng från godkänt och presterat riktigt bra på någon av följande uppgifter kan poäng på denna del räknas in för att nå godkäntgränsen. Normalt krävs för poäng på uppgift att man redovisat en fullständig lösningsgång, som i princip lett, eller åtminstone skulle kunnat leda, till målet.

5. Beräkna dubbelintegralen $\iint_D \frac{ye^{xy}}{x} dA$ då D är området i xy-planets första kvadrant begränsat av kurvorna $xy = 1,\ xy = 3,\ y = x$ och $y = 4x$. (6p)

6. Beräkna kurvintegralen $\oint_{\mathcal{C}} \frac{-y\,dx}{x^2+y^2} + \frac{x\,dy}{x^2+y^2}$ då $\mathcal{C}$ är den positivt orienterade randen till området $1 \leq x^2 + y^2,\ x^2 + 4y^2 \leq 9$. Visa sedan att kurvintegralen $\oint_{\mathcal{C}} \frac{-y\,dx}{x^2+y^2} + \frac{x\,dy}{x^2+y^2} = 2\pi$ för alla kurvor $\mathcal{C}$ som går ett varv moturs runt origo. (6p)

7. Definiera begreppet gränsvärde för en funktion av två variabler. Bevisa sedan, genom direkt tillämpning av definitionen, att funktionen $f(x, y) = 3x + 2y$ har gränsvärdet 7 då (x, y) går mot $(1, 2)$. (6p)

Ge exempel på funktion av två variabler, som saknar gränsvärde då $(x, y) \to (0, 0)$ men där alla gränsvärden $f(x, kx)$, då $x \to 0$, samt $f(0, y)$, då $y \to 0$, existerar och är lika. Visa att din funktion uppfyller villkoren.

Carl-Henrik F

Anonym kod	**Lösningsförslag till TMA043, 100115**	sid.nummer 1	Poäng

1. Till nedanstående uppgifter skall korta lösningar redovisas, samt svar anges, på anvisad plats(endast lösningar och svar på detta blad, och på anvisad plats, beaktas).

(a) Bestäm en ekvation för tangentplanet i punkten $(1, -1, 1)$ till funktionsytan $z = \frac{2x}{x^2+y^2}$. (2p)

Lösning: Ekvationen $z = f(a,b) + f_1(a,b)(x-a) + f_2(a,b)(y-b)$ beskriver tangentplanet för en funktionsyta $z = f(x,y)$ i en punkt $(a, b, f(a,b)$. I detta fall är $f(x,y) = \frac{2x}{x^2+y^2}$ och $(a,b) = (1,-1)$. Vi har

$$f_1(x,y) = \frac{2(x^2+y^2) - 2x \cdot 2x}{(x^2+y^2)^2} \quad \text{och} \quad f_2(x,y) = \frac{-2x \cdot 2y}{(x^2+y^2)^2}$$

och speciellt är $f_1(1,-1) = 0, f_2(1,-1) = 1$ så tangentplanet i punkten $(1,-1,1)$ beskrivs av ekvationen $z = 1 + 0 \cdot (x-1) + 1 \cdot (y - (-1)) \Leftrightarrow z = 2 + y$.

Svar: $z = 2 + y$

(b) Visa att $(-1,-1)$ är kritisk punkt till $f(x,y) = x^3 + y^3 + 3xy$ och bestäm punktens karaktär. (3p)

Lösning: Vi har $\nabla f(x,y) = (3x^2 + 3y)\mathbf{i} + (3y^2 + 3x)\mathbf{j}$ och speciellt är $\nabla f(-1,-1) = (3-3)\mathbf{i} + (3-3)\mathbf{j} = \mathbf{0}$ så $(-1,-1)$ är en kritisk punkt till f. För att bestämma punktens karaktär kan vi studera Hessianen av f i punkten. Vi har;

$$\mathscr{H}(x,y) = \begin{bmatrix} f_{11}(x,y) & f_{12}(x,y) \\ f_{21}(x,y) & f_{22}(x,y) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6x & 3 \\ 3 & 6y \end{bmatrix} \text{ och speciellt är } \mathscr{H}(-1,-1) = \begin{bmatrix} -6 & 3 \\ 3 & -6 \end{bmatrix}$$

Matrisen $\mathscr{H}(-1,-1)$ är negativt definit ty $det(\mathscr{H}(-1,-1)) = 27 > 0$ och $f_{11}(-1,-1) = -6 < 0$, så $(-1,-1)$ är en lokal maxpunkt.

Svar: $(-1,-1)$ är en lokal maxpunkt

(c) Antag att f har kontinuerliga partiella derivator av alla ordningar. Bestäm $\frac{\partial}{\partial r} f(r\cos t, r\sin t)$ och $\frac{\partial^2}{\partial t \partial r} f(r\cos t, r\sin t)$. (3p)

Lösning: Kedjeregeln ger; $\frac{\partial}{\partial r} f(r\cos t, r\sin t) = \underline{f_1(r\cos t, r\sin t)\cos t + f_2(r\cos t, r\sin t)\sin t}$

$\frac{\partial^2}{\partial t \partial r} f(r\cos t, r\sin t) = \frac{\partial}{\partial t}\left(f_1(r\cos t, r\sin t)\cos t + f_2(r\cos t, r\sin t)\sin t\right) =$

$$= \underline{(-f_{11}(r\cos t, r\sin t) r\sin t + f_{12}(r\cos t, r\sin t) r\cos t)\cos t - f_1(r\cos t, r\sin t)\sin t +}$$

$$\underline{+ (-f_{21}(r\cos t, r\sin t) r\sin t + f_{22}(r\cos t, r\sin t) r\cos t)\sin t + f_2(r\cos t, r\sin t)\cos t}$$

Svar: se understrukna uttryck ovan

(d) Beräkna dubbelintegralen $\iint_D xe^y \, dA$ då D är området $0 \le x \le 1, 0 \le y \le x$ (3p)

Lösning:

$$\iint_D xe^y \, dA = \int_0^1 \left(\int_0^x xe^y dy \right) dx = \int_0^1 x \left[e^y\right]_0^x dx = \int_0^1 x(e^x - 1) dx =$$

$$= \int_0^1 xe^x dx - \int_0^1 x dx = \left[xe^x\right]_0^1 - \int e^x dx - \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1 = e - \frac{1}{2} - \left[e^x\right]_0^1 = \frac{1}{2}$$

Svar:$\frac{1}{2}$

(e) Beräkna kurvintegralen $\oint_{\mathcal{C}} (\sin x + 3y)\, dx + (e^{-y} - 2x)\, dy$ då $\mathcal{C}$ är randen till området $D: \ x^2 + y^2 \le 4, y \ge 0$ ett varv moturs. (3p)

Lösning: Greens formel ger;
$$\oint_{\mathcal{C}} (\sin x + 3y)\, dx + (e^{-y} - 2x)\, dy =$$

$$= \iint_D \left(\frac{\partial}{\partial x}(e^{-y} - 2x) - \frac{\partial}{\partial y}(\sin x + 3y) \right) dxdy = -5 \iint_D dxdy = -5\frac{\pi 2^2}{2} = -10\pi$$

Svar: -10π