# TMA043 Flervariabelanalys E2, ht 10
# Vecko–PM läsvecka 4

**Adams: 14.1 - 14.6**

**Innehåll:**

Dubbel- och trippelintegraler, beräkning med upprepad integrering, generaliserade dubbelintegraler, medelvärdessats för dubbelintegraler, variabelsubstitution i dubbel- och trippelintegraler.

**Lärmål:**

För att bli godkänd på kursen skall du kunna:

| Adams | Mål |
|---|---|
| 14.1 | känna till och utnyttja dubbelintegralens egenskaper (sid 758) vid problemlösning |
| 14.2 | beräkna dubbelintegral genom upprepad enkelintegration (sats 14.2.2). |
| 14.3 | avgöra huruvida en integral är generaliserad och i så fall förklara vad som gör den generaliserad. |
| 14.3 | beräkna generaliserad dubbelintegral för $f(x,y) \geq 0$ och därigenom avgöra konvergens/divergens. |
| 14.3 | veta vad som menas med medelvärdet av en funktion av två eller tre variabler på ett område. |
| 14.4 | ange sambandet mellan cartesiska och polära koordinater samt sambandet mellan areaelementen. |
| 14.4 | ange hur ett område givet i cartesiska koordinater transformeras vid övergång till andra koordinater och omvänt. |
| 14.4 | känna till vad som menas med att en transformation $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ är ett-ett (sid 777). |
| 14.4 | beräkna dubbelintegraler med hjälp av föreslagen variabelsubstitution och tillämpning av sats 14.4.4. |
| 14.5 | beräkna trippelintegraler genom upprepad enkelintegration. |
| 14.6 | ange sambanden mellan cartesiska och sfäriska/cylindriska koordinater samt sambandet mellan volymelementen. |
| 14.6 | beräkna trippelintegraler med hjälp av föreslagen variabelsubstitution. |

För överbetyg skall du också kunna:

| Adams | Mål |
|---|---|
| 14.1 | utnyttja symmetrier vid beräkning av dubbelintegraler (se t.ex ex. 3 s 758-759). |
| 14.3 | formulera och bevisa medelvärdessatsen (sats 14.3.3) för dubbelintegraler. |
| 14.4 | formulera satsen om variabelsubstitution i dubbelintegraler (sid 778). |
| 14.4 | välja lämplig variabelsubstitution för beräkning av dubbelintegral |
| 14.6 | välja lämplig variabelsubstitution för beräkning av trippelintegral |
| 14 | beräkna itererad enkelintegral, två/tre variabler, genom att kasta om integrationsordningen (se t.ex. övn. 14.2.15). |

**Rekommenderade uppgifter**

| Avsnitt | Godkäntnivå | | Överbetygsnivå |
|---|---|---|---|
| | Instuderingsuppgifter | Träningsuppgifter | |
| 14.1 | 13 | 15, 17 | |
| 14.2 | 3, 5, 19 | 9, 13 | 25, 27, 30 |
| 14.3 | 3 | 7, 9 | 17, 21 |
| 14.4 | 3, 9, 13 | 15, 21, 23, 32($u = x + y, v = 3x + 4y$), 35b | 25, 27, 33, 36 |
| 14.5 | 1, 5 | 9, 14 | 7, 11, 19, 27 |
| 10.6 | 1-14 | | |
| 14.6 | 1, 3 | 13, 15, 16 | 5, 14.4.29 |

**Avgör vilka av följande påståenden som är sanna respektive falska. Nyttig träning för alla, problemtypen ges endast på tentans överbetygsdel.**

SF 1 Om $D$ är kvadraten i $xy$-planet med hörn i punkterna $(\pm 1, 0)$ och $(0, \pm 1)$ så är av symmetriskäl alltid $\iint_D f(x,y)dxdy = 4\iint_T f(x,y)dxdy$ där $T$ är triangeln med hörn i punkterna $(0,0), (1,0)$ och $(0,1)$

SF 2 För alla integrerbara funktioner $f(x,y)$ gäller att $\int_0^1 \int_y^1 f(x,y)dxdy = \int_0^1 \int_0^x f(x,y)dydx$

SF 3 Transformationen $x = u^3 - u, y = v$ avbildar området $S : -2 \leq u \leq 2, -2 \leq v \leq 2$ i $uv$-planet på området $D : -6 \leq x \leq 6, -2 \leq y \leq 2$ i $xy$-planet och

$$\iint_D y^2 dxdy = \iint_S v^2 \left| \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \right| dudv$$

SF 4 Integralen $\iint_D (x^2 + y^2)^{\alpha/2} dxdy$, där $D : 0 \leq x \leq \infty, 0 \leq y \leq \infty$, konvergerar om och endast om $\alpha > -2$

SF 5 Om $f(x,y)$ är en positiv och kontinuerlig funktion på ett begränsat område $D$ i $xy$-planet så är alltid $0 < \iint_D f(x,y)dxdy < \infty$

SF 6 Om $f(x,y)$ är integrerbar på ett begränsat område $D$ i $xy$-planet så är alltid

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \iint_{\text{int}(D)} f(x,y)dxdy$$

SF 7 För alla integrerbara funktioner $f(x,y)$ gäller att $\iint_D (f(x,y))^2 dxdy = \left(\iint_D f(x,y)dydx\right)^2$

SF 8 Om $f(x,y)$ är integrerbar på området $D : 0 \leq x, y \leq 1$ så ger alltid integralen $\iint_D f(x,y)dxdy$ volymen av det område i rummet som begränsas av $xy$-planet, funktionsytan $z = f(x,y)$ samt planen $x = 0, x = 1, y = 0, y = 1$.

SF 9 Integralen $\iiint_D r^2 \sin\phi drd\phi d\theta$, där $D : 0 \leq r \leq 1, -\pi/2 \leq \phi \leq \pi/2, 0 \leq \theta \leq 2\pi$ ger volymen av enhetsklotet i rummet.

## Veckans kryssuppgifter

13.1.5, 13.2.5, 13.3.7, 13.3.11