Lösningar
till deltentamen
godkändelen, del 1

TMA043 Flervariabelanalys E2

2010-09-18 kl. 8:30-11:30

Examinator: Johan Jonasson, Matematiska vetenskaper, Chalmers

Telefonvakt: Thomas Wernstål , telefon: 0703 357 731

Hjälpmedel: bifogat formelblad, ordlistan från kurswebbsidan, ej räknedosa

Tentamen på kursen består av tre delar; del 1 och del 2 av godkäntdelen samt överbetygsdelen. Denna deltenta täcker endast den första av dessa tre delar. För godkänt på tentamen som helhet krävs antingen 25 poäng på godkäntdelens två delar sammanlagt, eller att båda delarna är godkända var för sig. För godkänt på del 1 krävs minst 10 poäng, för godkänt på del 2 krävs 13 poäng. Erhållen poäng på någon av delarna får ersätta poäng på motsvarande del på senare tentamen tills kursen ges nästa läsår. För godkänt på kursen skall också Matlab-momentet vara godkänt. För betyg 4 eller 5 krävs dessutom 33 resp. 42 poäng sammanlagt på tentamens alla delar.

Lösningar läggs ut på kursens webbsida första vardagen efter tentamensdagen. Tentan rättas och bedöms anonymt. Resultat meddelas i samband med undervisningen senast tre veckor efter tentamenstillfället.

Godkäntdelen, del 1

se uppgift 1:abc och 2 på nästa blad

Lycka till!
Johan Jonasson

Formelblad för TMA043 och MVE085, 10/11

Trigonometri.

$$\cos(x+y) = \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y)$$

$$\sin(x+y) = \sin(x)\cos(y) + \cos(x)\sin(y)$$

$$\cos(x)\cos(y) = \frac{1}{2}(\cos(x-y) + \cos(x+y))$$

$$\sin(x)\sin(y) = \frac{1}{2}(\cos(x-y) - \cos(x+y))$$

$$\sin(x)\cos(y) = \frac{1}{2}(\sin(x-y) + \sin(x+y))$$

$$\tan(x+y) = \frac{\tan(x)+\tan(y)}{1-\tan(x)\tan(y)}$$

Integralkatalog

$$\int x^a\,dx = \frac{x^{a+1}}{a+1} + C \quad , \quad a \neq -1$$

$$\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + C$$

$$\int \sin x\,dx = -\cos x + C$$

$$\int \cos x\,dx = \sin x + C$$

$$\int \frac{1}{cos^2 x}\,dx = \tan x + C$$

$$\int \frac{1}{sin^2 x}\,dx = -\cot x + C$$

$$\int e^x\,dx = e^x + C$$

$$\int a^x\,dx = \frac{a^x}{\ln a} + C \ , \ 0 < a \neq 1$$

$$\int \frac{1}{x^2+a^2}\,dx = \frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a} + C \ , \ a \neq 0$$

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \ln|f(x)| + C$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{a-x^2}}\,dx = \arcsin\frac{x}{\sqrt{a}} + C \ , \ a > 0$$

$$\int \sqrt{a-x^2}\,dx = \frac{1}{2}x\sqrt{a-x^2} + \frac{a}{2}\arcsin\frac{x}{\sqrt{a}} + C \ , \ a > 0$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+a}}\,dx = \ln|x+\sqrt{x^2+a}| + C \ , \ a \neq 0$$

$$\int \sqrt{x^2+a}\,dx = \frac{1}{2}(x\sqrt{x^2+a} + a\ln|x+\sqrt{x^2+a}|) + C$$

Maclaurinutvecklingar

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$$

$$\sin x = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1}\frac{x^{2k-1}}{(2k-1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots$$

$$\cos x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots$$

$$(1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} x^k = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \dots \quad , \quad |x| < 1 \quad , \quad \binom{\alpha}{k} = \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-k+1)}{k(k-1)\dots 1}$$

$$\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1}\frac{x^k}{k} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots \quad , \quad -1 < x \leq 1$$

$$\arctan x = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1}\frac{x^{2k-1}}{2k-1} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots \quad , \quad |x| \leq 1$$

Övrigt

Masscentrum (x_T, y_T, z_T) för Ω ges av $x_T = \dfrac{\iiint_\Omega x\rho(x,y,z)\,dxdydz}{\iiint_\Omega \rho(x,y,z)\,dxdydz}$, analogt för y_T, z_T.

$\rho(x,y,z)$ är densiteten.

Anonym kod	TMA043 Flervariabelanalys E2 2010-09-18	sid.nummer	Poäng

Godkäntdelen: del 1

1. Till nedanstående deluppgifter skall korta lösningar redovisas, samt svar anges, på anvisad plats (endast lösningar och svar på detta blad, och på anvisad plats, beaktas).

(a) Ange en parametrisering, på formen $\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j}$, till cirkeln med radie ρ centrerad i origo. (2p)

Svar: $\mathbf{r}(t) = \rho \cos t\, \mathbf{i} + \rho \sin t\, \mathbf{j}$

(b) Beräkna de partiella derivatorna till funktionen $f(x, y, z) = xy^2 \sin z$. (3p)

Svar: $f_1(x, y, z) = y^2 \sin z$, $f_2(x, y, z) = 2xy \sin z$, $f_3(x, y, z) = xy^2 \cos z$

(c) Ange ekvation för tangentlinjen till nivåkurvan $f(x, y) = 0$, där $f(x, y) = 4x^2 - 16x + y^2 + 12$, i punkten $(6/5, 6/5)$. (3p)

Lösning: $\nabla f(x, y) = (8x - 16)\mathbf{i} + 2y\mathbf{j}$

Gradienten $\nabla f(6/5, 6/5) = \frac{-32}{5}\mathbf{i} + \frac{12}{5}\mathbf{j}$ är vinkelrät mot den efterfrågade tangentlinjen, som därmed kan beskrivas med ekvationen

$$\frac{-32}{5}(x - \frac{6}{5}) + \frac{12}{5}(y - \frac{6}{5}) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 8x - 3y = 6$$

Svar: $8x - 3y = 6$

2. Låt $f(x, y) = xy^2 - 4x$. (6p)

(a) Bestäm de kritiska punkterna till f och avgör om de är lokala minima, lokala maxima eller sadelpunkter.

Lösning: $\nabla f(x, y) = (y^2 - 4)\mathbf{i} + 2xy\mathbf{j} = \mathbf{0} \quad \Leftrightarrow \quad (x, y) = (0, \pm 2)$

så de kritiska punkterna är $(x, y) = (0, \pm 2)$.
För att avgöra karaktären på de kritiska punkterna undersöker vi Hessianen i resp. punkt. Hessianen till $f(x, y)$ är $\mathscr{H}(x, y) = \begin{bmatrix} 0 & 2y \\ 2y & 2x \end{bmatrix}$ och speciellt är $\mathscr{H}(0, \pm 2) = \begin{bmatrix} 0 & \pm 4 \\ \pm 4 & 0 \end{bmatrix}$.
Eftersom $det(\mathscr{H}(0, 2)) = -16 < 0$ så är $\mathscr{H}(0, \pm 2)$ indefinita varpå vi konstaterar att $(0, \pm 2)$ är sadelpunkter.

Svar: f har de kritiska punkterna $(x, y) = (0, \pm 2)$ och de är båda sadelpunkter.

(b) Vad är största och minsta värdet av f på triangeln som begränsas av linjerna $y = 0$, $x + y = 3$ och $y - x = 3$?

Lösning: Eftersom funktionen saknar singulariteter så måste extremvärdena antas antingen i den kritiska punkten $(0, 2)$ (eftersom $(0, -2)$ inte ligger i triangelområdet), där $f(0, 2) = \underline{0}$, eller i punkter på randen. Vi undersöker de tre randbitarna;

$$R_1 : y = 0, -3 \le x \le 3\ ,\ R_2 : y = 3 - x, 0 \le x \le 3 \ \text{ och } \ R_3 : y = 3 + x, -3 \le x \le 0.$$

$R_1 : g_1(x) = f(x, 0) = -4x$ antar sitt största och minsta värde i ändpunkterna på intervallet $-3 \le x \le 3$ vilket motsvarar två av hörnen i triangeln. Låt oss vänta med att beräkna funktionsvärdena i hörnen tills slutet av uppgiften. Vi går vidare och tittar på nästa randbit.

$R_2 : g_2(x) = f(x, 3 - x) = x(3 - x)^2 - 4x = x^3 - 6x^2 + 5x$. Vi har $g_2'(x) = 3x^2 - 12x + 5 = 3(x - 2)^2 - 7 = 0 \Leftrightarrow x = 2 \pm \sqrt{\frac{7}{3}}$. Endast $x = 2 - \sqrt{\frac{7}{3}}$ ligger i intervallet $0 \le x \le 3$ och $g_2(2 - \sqrt{\frac{7}{3}}) = \underline{-6 + \frac{14}{3}\sqrt{\frac{7}{3}}}$. Vi beräknar funktionsvärdena i randbitens ändpunkter nedan.

$R_3 : g_3(x) = f(x, 3 + x) = x(3 + x)^2 - 4x = x^3 + 6x^2 + 5x$. Vi har $g_3'(x) = 3x^2 + 12x + 5 = 3(x + 2)^2 - 7 = 0 \Leftrightarrow x = -2 \pm \sqrt{\frac{7}{3}}$. Endast $x = -2 + \sqrt{\frac{7}{3}}$ ligger i intervallet $-3 \le x \le 0$ och $g_3(-2 + \sqrt{\frac{7}{3}}) = \underline{6 - \frac{14}{3}\sqrt{\frac{7}{3}}}$

Funktionsvärdena i triangelns hörn är;
$f(3, 0) = \underline{-12}$ $(< 6 - \frac{14}{3}\sqrt{\frac{7}{3}})$, $f(-3, 0) = \underline{12}$ $(> -6 + \frac{14}{3}\sqrt{\frac{7}{3}})$ och $f(0, 3) = \underline{0}$, så

Svar: Funktionens största och minsta värde på triangeln är 12 respektive -12.