

Flervariabelanalys och Matlab

Kapitel 4

Thomas Wernstål
Carl-Henrik Fant
Matematiska Vetenskaper

30 september 2009

4 Vektorfält, strömlinjer, potentialer, funktioner på ytor

4.1 Vektorfält

Vi kan illustrera vektorfält, såväl i planet som i rummet, med kommandona `quiver` resp `quiver3`. Först måste vi dock skapa ett rutnät med de punkter i vilket vi vill sätta pilar (som illustrerar vektorfältets storlek och riktning i respektive punkt). Vektorfältet $F = (xy, x - y)$ i planet kan vi t.ex. illustrera med kommandona

```
>> [x,y]=meshgrid(-3:0.3:3);  
>> F1=x.*y;F2=x-y;  
>> quiver(x,y,F1,F2)
```

Det är viktigt att tänka på att man inte sätter pilarna för tätt (dvs. har för liten steglängd i `meshgrid`). Å andra sidan vill man ha tillräckligt med pilar för att få en bra uppfattning om vektorfältets skiftningar. Det kan vara svårt att få det bra från början och man kan behöva pröva sig fram.

Låt oss även plotta ett vektorfält i rummet

```
>> [x,y,z]=meshgrid(-3:0.8:3);  
>> F1=x.*y.*z;F2=x-y+z;F3=x.*y+z;  
>> quiver3(x,y,z,F1,F2,F3)
```

Om man här väljer för liten steglängd i `meshgrid` så riskerar man också att det tar för lång tid för Matlab att plotta figuren (och att det hänger sig), så var försiktig när du väljer steglängden. Börja hellre med ett lite grovare rutnät för att sedan förfina i den mån det behövs.

4.1.1 Övningar

4.1.1 Plotta vektorfältet $F = (y^2 - x^2, 2 - x + y)$ på området $-2 < x < 2, -2 < y < 2$.

4.1.2 Plotta vektorfältet $F(x, y, z) = (x - 1, 2z, -y)$ på området $0 < x < 3, 1 < y < 4, -2 < z < 2$.

4.2 Strömlinjer

Vi kan även låta Matlab skissa på fältlinjerna till vektorfält t.ex. med hjälp av kommandot `streamlines`. Man måste då också ange i vilka startpunkter som fältlinjerna skall börja i. Startpunkterna kan tex skapas med `meshgrid`. Följande kommandon plottar några fältlinjer till vektorfältet $F = (xy, x - y)$ i samma figur som vektorfältet självt;

```
>> [x,y]=meshgrid(-3:0.3:3);
>> F1=x.*y;F2=x-y;
>> quiver(x,y,F1,F2)
>> [sx,sy]=meshgrid(-2:0.5:2);
>> streamline(x,y,F1,F2,sx,sy)
```

Startpunkterna anges här av matriserna `sx` och `sy`. Vi kan naturligtvis plotta fältlinjerna genom samtliga punkter i vilket vi ritat en pil, men då riskerar vi att figuren blir för plottrig. Prova och avgör själv

```
>> streamline(x,y,F1,F2,x,y)
```

Låt oss även plotta några fältlinjer till vektorfältet $F = (xyz, x - y + z, xy + z)$

```
>> [x,y,z]=meshgrid(-3:0.8:3);
>> F1=x.*y.*z;F2=x-y+z;F3=x.*y+z;
>> quiver3(x,y,z,F1,F2,F3)
>> [sx,sy,sz]=meshgrid(-2:1:2);
>> streamline(x,y,z,F1,F2,F3,sx,sy,sz)
```

Om man vill kan man också välja startpunkterna för fältlinjerna så att de ligger på en och samma (parametriserad) yta. Prova t.ex.

```
>> [s,t]=meshgrid(0:0.05:1);
>> sx=s+t; sy=s.^2-t.^2; sz=s.*t;
>> surf(sx,sy,sz)
>> streamline(x,y,z,F1,F2,F3,sx,sy,sz)
```

Startpunkterna kan också ligga på en nivåyta. Prova t.ex.

```
>> [s,t,r]=meshgrid(-3:0.3:3);
>> g=s.^2+t.^2+r.^2;
>> isosurface(s,t,r,g,1);
>> [p,q]=isosurface(s,t,r,g,1);
>> sx=q(:,1);sy=q(:,2);sz=q(:,3);
>> streamline(x,y,z,F1,F2,F3,sx,sy,sz)
```

Man kan också studera hur partiklar rör sig (utefter fältlinjerna) under inverkan av vektorfältet.

```
>> verts = stream3(x,y,z,F1,F2,F3,sx,sy,sz);
>> iverts = interpstreamspeed(x,y,z,F1,F2,F3,verts,0.01);
>> streamparticles(iverts,30,'animate',10,'FrameRate',50)
```

Det finns även andra kommandon för illustration av vektorfälts flöden. Prova

```
>> streamtube(x,y,z,F1,F2,F3,sx,sy,sz)
```

Ett annat sätt att illustrera någon typ av strömning ut ur (eller in i) ett område i rummet får vi genom att studera strömningens hastighetsvektorer bara på ytan av området. Låt oss titta på ett exempel.

Exempel. Låt S vara den yta som parametriseras av $x = s + t, y = s^2 - t^2, z = st$, $-4 \leq s, t \leq 4$ och låt $F(x, y, z) = (x - 1, 2z, -y)$ vara hastighetsvektorn i en vätskeströmning. Den vätskevolym som strömmar genom ytan S ges av normalytintegralen $\iint_S F \cdot dS$. För att illustrera hur strömningen varierar utefter ytan plottar vi ett antal hastighetsvektorer på ytan S .

```
>> [s,t]=meshgrid(0:0.05:1);
>> x=s+t; y=s.^2-t.^2; z=s.*t;
>> surf(x,y,z), hold on
>> F1=x-1;F2=2*z;F3=-y;
>> quiver3(x,y,z,F1,F2,F3),hold off
>> shading interp, axis('equal')
```

Om man är mer intresserad av hur mycket vätska som strömmar genom ytans olika delar och inte strömningens riktning så kan man plotta hastighetsvektorernas projektion i normalriktningen. Detta är lite mer komplicerat men kan t.ex. utföras med följande kommandorader.

```
>> [s,t]=meshgrid(0:0.05:1);
>> x=s+t; y=s.^2-t.^2; z=s.*t;
>> surf(x,y,z)
>> [u,v,w]=surfnorm(x,y,z);
>> k=sqrt(u.^2+v.^2+w.^2);u=u./k;v=v./k;w=w./k;
>> [m,n]=size(u); r=m*n;
>> uq=u(1:r); vq=v(1:r); wq=w(1:r);
>> xq=x(1:r); yq=y(1:r); zq=z(1:r);
>> pq=dot([uq;vq;wq],[xq-1;2*zq;-yq]);
```

```
>> p=ones(size(u));p(1:r)=pq;
>> hold, quiver3(x,y,z,p.*u,p.*v,p.*w), hold
>> shading interp, axis('equal')
```

Istället för att plotta normalvektorer till ytan som med sin längd anger strömningens storlek genom ytan så kan vi låta färgen på ytan variera med längden på vektorerna (om man inte anger något annat så bestäms färgen på ytan av höjden över xy -planet dvs. värdet på z i resp. punkt). Det kan då vara lättare att se åt vilket håll strömningen sker och hur stor den är på ytans olika delar. Istället för att använda `quiver3` (dvs. den näst sista kommandoraden ovan) så ger vi i så fall följande kommando

```
>> surf(x,y,z,p), colorbar, shading interp
```

Det röda anger strömning genom ytan åt det ena hållet och blått åt det andra hållet.

□

4.2.1 Övningar

4.2.1 Plotta strömlinjer till vektorfältet $F = (y^2 - x^2, 2 - x + y)$ på området $-2 < x < 2, -2 < y < 2$. Plotta även själva vektorfältet i samma figur (se övning 4.1.1).

4.2.2 Antag att $F(x, y, z) = (x - 1, 2z, -y)$ representerar hastighetsvektorn i en vätskeströmning

(a) Plotta strömlinjer till vektorfältet i området $0 < x < 3, 1 < y < 4, -2 < z < 2$. Strömlinjerna skall starta i punkter på planet $z = 1$. Plotta även själva vektorfältet i samma figur (se övning 4.1.2).

(b) Plotta planet $z = 0$ i samma figur som strömlinjerna från (a) och illustrera hur vätskepartiklar rör sig utefter strömlinjerna genom planet $z = 0$

(c) Plotta hastighetsvektorer i planet $z = 0$. Färgsätt även planet så att färgerna markerar hur stort flödet är genom ytan.

4.2.3 Låt Ω vara det område i rummet som begränsas av halvsfären $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ och cirkelskivan $x^2 + y^2 \leq 1, z = 0$. Antag vidare att $F(x, y, z) = (x - y^2, z - y, x^2 - 3z)$ representerar hastighetsvektorn i en vätskeströmning i Ω . Illustrera strömningen ut/in ur området Ω genom att plotta ytan till området och ett antal hastighetsvektorer på ytan. Plotta även hastighetsvektorernas projektion i normalriktningen.