Lösningsförslag till tentamen
TMA043 Flervariabelanalys E2

2013-01-16 kl. 8.30–12.30

Examinator: Johan Jonasson , Matematiska vetenskaper, Chalmers

Telefonvakt: Adam Andersson, telefon: 0703 088 304

Hjälpmedel: bifogat formelblad, ordlistan frå n kurswebbsidan, ej räknedosa

För godkänt på tentan krävs antingen 25 poäng på godkäntdelens två delar sammanlagt, eller att båda delarna är godkända var för sig. För godkänt på del 1 krävs minst 10 poäng, för godkänt på del 2 krävs 13 poäng. Erhållen poäng på någon av delarna få r ersätta poäng på motsvarande del på senare tentamen tills kursen ges nästa läså r. För godkänt på kursen skall också Matlabmomentet vara godkänt. För betyg 4 eller 5 krävs dessutom 33 resp. 42 poäng sammanlagt på tentamens alla delar.

Lösningar läggs ut på kursens webbsida första vardagen efter tentamensdagen. Tentan rättas och bedöms anonymt. Resultat meddelas via Ladok ca. tre veckor efter tentamenstillfället. Första granskningstillfälle meddelas på kurswebbsidan, efter detta sker granskning alla vardagar 9-13, MV:s exp.

Godkäntdelen, del 1

Uppgift 1 och 2 se nästa blad

Godkäntdelen, del 2

Uppgift 3, 4 och 5 se blad 3

överbetygsdelen

Endast om man ligger enstaka poäng frå n godkänt och presterat riktigt bra på någon av följande uppgifter kan poäng på denna del räknas in för att nå godkäntgränsen. Normalt krävs för poäng på uppgift att man redovisat en fullständig lösningsgång, som i princip lett, eller åtminstone skulle kunnat leda, till målet.

6. Visa att man med variabelbytet $\xi = x$, $\eta = 2x - t$ kan omvandla differentialekvationen;

$$\frac{\partial u}{\partial x} + 2\frac{\partial u}{\partial t} = x + t \tag{1}$$

till differentialekvationen;

$$\frac{\partial u}{\partial \xi} = 3\xi - \eta \tag{2}$$

Använd sedan denna omskrivningen för att bestämma den allmänna lösningen till (1). (6p)

Lösning: Vi har;

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial \xi} + 2\frac{\partial u}{\partial \eta}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial t} = -\frac{\partial u}{\partial \eta}$$

$$x = \xi \quad \text{och} \quad t = 2\xi - \eta$$

som insatt i (1) ger (2). Integrerar vi båda led i (2) m.a.p. ξ så får vi;

$$u = \frac{3}{2}\xi^2 - \eta\xi + f(\eta)$$

för någon funktion f, så;

Svar: Alla lösningarna till (1) har formen $u(x,t) = \frac{3}{2}x^2 - x(2x-t) + f(2x-t)$, för någon deriverbar funktion f.

7. Låt $\mathcal{C}_\epsilon$ vara skärningskurvan mellan sfären $x^2+y^2+z^2=\epsilon^2$ (där ϵ är ett fixt positivt tal) och planet $x+y+z=0$, orienterad medurs sett uppifrå n. Beräkna cirkulationen $\int_{\mathcal{C}_\epsilon}\mathbf{F}\bullet d\mathbf{r}$ av hastighetsfältet $\mathbf{F}=y\mathbf{i}+z\mathbf{j}+x\mathbf{k}$ runt $\mathcal{C}_\epsilon$. Beräkna speciellt gränsvärdet;

$$\lim_{\epsilon\to 0^+}\frac{1}{\pi\epsilon^2}\int_{\mathcal{C}_\epsilon}\mathbf{F}\bullet d\mathbf{r}$$ (6p)

Lösning: Kurvan $\mathcal{C}_\epsilon$ är randkurva till en cirkelskiva S_ϵ i planet $x+y+z=0$, med centrum i origo och radie ϵ. Vi har;

$$\mathbf{curl}\,\mathbf{F}=\begin{vmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ y & z & x\end{vmatrix}=-(\mathbf{i}+\mathbf{j}+\mathbf{k})$$

och C_ϵ har positiv orientering m.a.p. den nedåtriktade normalen till ytan S_ϵ dvs.

$$\hat{\mathbf{N}}=-\frac{1}{\sqrt{3}}(\mathbf{i}+\mathbf{j}+\mathbf{k})$$

så Stokes Sats ger att;

$$\int_{\mathcal{C}_\epsilon}\mathbf{F}\bullet d\mathbf{r}=\iint_{S_\epsilon}\mathbf{curl}\,\mathbf{F}\bullet\hat{\mathbf{N}}\,dS=\sqrt{3}\iint_{S_\epsilon}dS=\sqrt{3}\pi\epsilon^2$$

Speciellt få r vi att;

$$\lim_{\epsilon\to 0^+}\frac{1}{\pi\epsilon^2}\int_{\mathcal{C}_\epsilon}\mathbf{F}\bullet d\mathbf{r}=\sqrt{3}$$

Svar: $\int_{\mathcal{C}_\epsilon}\mathbf{F}\bullet d\mathbf{r}=\sqrt{3}\pi\epsilon^2$ och $\lim_{\epsilon\to 0^+}\frac{1}{\pi\epsilon^2}\int_{\mathcal{C}_\epsilon}\mathbf{F}\bullet d\mathbf{r}=\sqrt{3}$

8. Antag att $f(x,y,z)$ är differentierbar i en punkt (a,b,c) och att $\nabla f(a,b,c)\neq 0$. Visa då att $\nabla f(a,b,c)$ är en normalvektor till nivåytan $f(x,y,z)=C$ genom (a,b,c). (6p)

Bevis: Antag att $\mathbf{r}=x(t)\mathbf{i}+y(t)\mathbf{j}+z(t)\mathbf{k}, t\in I$ är parametrisering av en kurva genom (a,b,c) som ligger helt i nivåytan $f(x,y,z)=C$ genom (a,b,c). Det finns då något $t_0\in I$ sådant att $\mathbf{r}(t_0)=(a,b,c)$ och

$$f(x(t),y(t),z(t))=f(a,b,c)\quad,\quad\text{för alla } t\in I$$

Deriverar vi båda led i denna identitet m.a.p. t så ger kedjeregeln att;

$$f_1(x(t),y(t),z(t))x'(t)+f_2(x(t),y(t),z(t))y'(t)+f_3(x(t),y(t),z(t))z'(t)=0$$

dvs. $\nabla f(\mathbf{r}(t))\bullet\mathbf{r}'(t)=0$. Speciellt med $t=t_0$ få r vi att $\nabla f(a,b,c)\bullet\mathbf{r}'(t_0)=0$ Eftersom $\mathbf{r}'(t_0)$ är en tangentvektor till kurvan så följer att $\nabla f(a,b,c)$ är vinkelrät mot kurvan i (a,b,c). Detta gäller för alla kurvor genom (a,b,c) som ligger helt i nivåytan genom (a,b,c) så $\nabla f(a,b,c)$ måste vara vinkelrät mot nivåytan genom (a,b,c), vilket skulle bevisas.

Anonym kod	TMA043 Flervariabelanalys E2 2013-01-16	sid.nummer	Poäng

Godkäntdelen: del 1

1. Till nedanstående uppgifter skall korta lösningar redovisas, samt svar anges, på anvisad plats (endast lösningar och svar på detta blad, och på anvisad plats, beaktas).

(a) I vilka punkter $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ är $f(x,y) = \begin{cases} x^2+y^2 & \text{, då } \quad x \neq y \\ x^2 & \text{, då } \quad x = y \end{cases}$ kontinuerlig. (motivera ditt svar!) (2p)

Svar och motivering: $f(x, y)$ är uppenbarligen kontinuerlig i alla punkter (a, b) sådana att $a \neq b$. Eftersom

$$x^2 + y^2 \to 2a^2 \quad \text{och} \quad x^2 \to a^2, \quad \text{då} \quad (x, y) \to (a, a)$$

och $2a^2 = a^2$ endast då $a = 0$ så följer också att $f(x, y)$ är kontinuerlig i origo, men diskontinuerlig i övriga punkter på linjen $y = x$.

(b) Parametrisera skärningskurvan mellan planet $x + y = 1$ och paraboloiden $z = x^2 + y^2$. Bestäm även en tangentvektor $\mathbf{v}$ till skärningskurvan i punkten $(2, -1, 5)$. (3p)

Lösning: Med $x = t$ få r vi $y = 1-x = 1-t$ och därmed $z = x^2+y^2 = t^2+(1-t)^2 = 2t^2-2t+1$ så $\mathbf{r} = t\mathbf{i}+(1-t)\mathbf{j}+(2t^2-2t+1)\mathbf{k}$, $-\infty < t < \infty$ är en parametrisering av skärningskurvan. Punkten $(2, -1, 5)$ motsvaras då av parametervärdet $t = 2$. Hastighetsvektorn ger oss sedan en tangentvektor. Vi har;

$$\mathbf{r}'(t) = \mathbf{i} - \mathbf{j} + (4t - 2)\mathbf{k}$$

och speciellt $\mathbf{r}'(2) = \mathbf{i} - \mathbf{j} + 6\mathbf{k}$

Svar: T.ex. $\mathbf{r} = t\mathbf{i} + (1 - t)\mathbf{j} + (2t^2 - 2t + 1)\mathbf{k}$, $-\infty < t < \infty$ och $\mathbf{v} = \mathbf{i} - \mathbf{j} + 6\mathbf{k}$.

(c) Bestäm Jacobimatrisen $\mathbf{f}'(x, y)$ till den funktion från $\mathbb{R}^2$ till $\mathbb{R}^2$ som ges av $\mathbf{f}(x, y) = (xy, x^2 + y^2)$. Beräkna speciellt $\mathbf{f}'(2, 1)$ och använd bl.a. denna matris för att bestämma ett approximativt värde på $\mathbf{f}(2.1, 0.8)$. (3p)

Lösning: Vi har $\mathbf{f}'(x, y) = \begin{bmatrix} y & x \\ 2x & 2y \end{bmatrix}$ och speciellt $\mathbf{f}'(2, 1) = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$

så $\mathbf{f}(2.1, 0.8) \approx \mathbf{f}(2, 1) + \mathbf{f}'(2, 1) \begin{bmatrix} 0.1 \\ -0.2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.1 \\ -0.2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.7 \\ 5 \end{bmatrix}$

Svar: $\mathbf{f}'(2, 1) = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$ och $\mathbf{f}(2.1, 0.8) \approx (1.7, 5)$

Till följande uppgift skall fullständig lösning redovisas på separat skrivpapper. Motivera och förklara så väl du kan.

2. Använd Lagrange multiplikatormetod för att bestämma det kortaste och längsta avstå ndet frå n punkten $(1, -2, 2)$ till sfären $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ (6p)

Lösning: Av geometriska skäl är det uppenbart att det finns precis två punkter på sfären som ger det kortaste respektive längsta avståndet till $(1, -2, 2)$. Avståndet från $(1, -2, 2)$ till en godtycklig punkt (x, y, z) på sfären ges av;

$$d = \sqrt{(x-1)^2 + (y+2)^2 + (z-2)^2}$$

För enkelhets skull studerar vi d^2 istället (vilket antar sitt största och minsta värde i samma punkter). För att bestämma dess största värde under bivillkoret $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ undersöker vi kritiska punkter till Lagrangefunktionen;

$$L(x,y,z,\lambda) = (x-1)^2 + (y+2)^2 + (z-2)^2 + \lambda(x^2+y^2+z^2-1)$$

Vi får;

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial x} = 2(x-1) + 2\lambda x = 0 & \Leftrightarrow \quad x = \frac{1}{1+\lambda} \\ \frac{\partial L}{\partial y} = 2(x+2) + 2\lambda y = 0 & \Leftrightarrow \quad y = \frac{-2}{1+\lambda} \\ \frac{\partial L}{\partial z} = 2(z-2) + 2\lambda z = 0 & \Leftrightarrow \quad z = \frac{2}{1+\lambda} \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda} = x^2+y^2+z^2-1 = 0 & \end{cases}$$

Ersätter vi x, y, z i den sista ekvationen med motsvarande uttryck i λ (frå n de tre första ekvationerna) får vi;

$$\left(\frac{1}{1+\lambda}\right)^2 + \left(\frac{-2}{1+\lambda}\right)^2 + \left(\frac{2}{1+\lambda}\right)^2 - 1 = 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$\frac{1}{(1+\lambda)^2}(1+4+4) = 1 \quad \Leftrightarrow \quad (1+\lambda)^2 = 9 \quad \Leftrightarrow \quad \lambda = -1 \pm 3$$

$\lambda = 2$ ger punkten $(\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{2}{3})$ och avståndet $d = \sqrt{\left(-\frac{2}{3}\right)^2 + \left(\frac{4}{3}\right)^2 + \left(-\frac{4}{3}\right)^2} = 2$

$\lambda = -4$ ger punkten $(-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{2}{3})$ och avståndet $d = \sqrt{\left(-\frac{4}{3}\right)^2 + \left(\frac{8}{3}\right)^2 + \left(-\frac{8}{3}\right)^2} = 4$

Svar: Det kortaste avståndet är 2 och det längsta är 4.

Anonym kod	TMA043 Flervariabelanalys E2 2013-01-16	sid.nummer	Poäng

Godkäntdelen: del 2

3. Till nedanstående uppgifter skall korta lösningar redovisas, samt svar anges, på anvisad plats (endast lösningar och svar på detta blad, och på anvisad plats, beaktas).

(a) Ange sambandet mellan Cartesiska och sfäriska koordinater. Beskriv sedan i sfäriska koordinater det område Ω som i Cartesiska koordinater bestäms av att $\sqrt{x^2+y^2} \leq z$ och $x^2+y^2+z^2 \leq 4$ (3p)

Lösning/Svar:

$$\begin{cases} x = \rho \sin\phi \cos\theta \\ y = \rho \sin\phi \sin\theta \\ z = \rho \cos\theta \end{cases} \qquad \text{och} \quad \Omega: \ 0 \leq \rho \leq 2 \ , \ 0 \leq \phi \leq \frac{\pi}{4} \ , \ 0 \leq \theta \leq 2\pi$$

(b) Beräkna trippelintegralen $\iiint_K xy\,dV$, där K är det område i $\mathbb{R}^3$ som begränsas av koordinatplanen $x=0, y=0, z=0$, samt planen $z = 1-x$ och $y=1$. (3p)

Lösning:

$$\iiint_K xy\,dV = \int_0^1 \left(\int_0^1 \left(\int_0^{1-x} xy\,dz \right) dy \right) dx =$$

$$= \int_0^1 \left(\int_0^1 xy(1-x)\,dy \right) dx = \frac{1}{2} \int_0^1 x(1-x)\,dx = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3 \right]_0^1 = \frac{1}{12}$$

Svar: 1/12

Till följande uppgifter skall fullständiga lösningar redovisas på separata skrivpapper. Motivera och förklara så väl du kan.

4. Betrakta vektorfältet $\mathbf{F} = y^3\mathbf{i} - x^3\mathbf{j}$ och låt $\mathcal{C}$ vara cirkeln $x^2+y^2=2$ orienterad medurs.

(a) Illustrera hur vektorfältet $\mathbf{F}$ varierar utefter kurvan $\mathcal{C}$ genom att skissa vektorfältspilar (som indikerar vektorfältets storlek och riktning) i 8 punkter på cirkeln. (2p)

Lösning:

(b) Beräkna kurvintegralen $\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \bullet d\mathbf{r} = \int_{\mathcal{C}} y^3 dx - x^3 dy$ (4p)

Lösning: Greens formel ger att;

$$\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \bullet d\mathbf{r} = -\int_{-\mathcal{C}} \mathbf{F} \bullet d\mathbf{r} = -\iint_D \left(\frac{\partial}{\partial x}(-x^3) - \frac{\partial}{\partial y}(y^3) \right) dxdy = \iint_D (3x^2+3y^2)\,dxdy$$

där D är cirkelskivan $x^2+y^2 \leq 2$. Polär substitution ger sedan att;

$$\iint_D (3x^2+3y^2)\,dxdy = 3\int_0^{2\pi} \left(\int_0^{\sqrt{2}} r^2 \cdot r\,dr \right) d\theta = 6\pi \left[\frac{1}{4} r^4 \right]_0^{\sqrt{2}} = 6\pi$$

Svar: 6π

5. Låt $\mathcal{S}$ vara den yta som parametriseras av $\mathbf{r} = (u+v)\mathbf{i} + (u-v)\mathbf{j} + uv\mathbf{k}$, $0 \le u \le 2, 0 \le v \le 2$.

(a) Ange en normalvektor $\mathbf{N}$ till ytan $\mathcal{S}$ i punkten $(2, 0, 1)$ (3p)

Lösning: $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}$ och $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}$ är tangentvektorer till ytan så deras vektorprodukt ger en normalvektor;

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 1 & v \\ 1 & -1 & u \end{vmatrix} = (u+v)\mathbf{i} - (u-v)\mathbf{j} - 2\mathbf{k}$$

Punkten $(2, 0, 1)$ motsvaras av parametervärdena $u = 1$ och $v = 1$ så en normalvektor till ytan i den punkten är;

Svar: T.ex. $\mathbf{N} = 2\mathbf{i} - 2\mathbf{k}$

(b) Beräkna storleken på flödet av hastighetsfältet $\mathbf{F} = (x+y)\mathbf{i} + (x-y)\mathbf{j} + 2z\mathbf{k}$ genom ytan $\mathcal{S}$. (3p)

Lösning: Uttryckt i parametrarna u och v är $\mathbf{F} = 2u\mathbf{i} + 2v\mathbf{j} + 2uv\mathbf{k}$ så om vi sätter $D : 0 \le u \le 2, 0 \le v \le 2$ och låter $\hat{\mathbf{N}}$ beteckna de nedåtriktade enhetsnormalerna till ytan, så följer av kalkylerna i (a) att;

$$\iint_{\mathcal{S}} \mathbf{F} \bullet \hat{\mathbf{N}}\, dS = \iint_D \mathbf{F} \bullet \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \right) dudv) =$$

$$= \iint_D (2u(u+v) - 2v(u-v) - 4uv)\, dudv =$$

$$= 2 \int_0^2 \left(\int_0^2 (u-v)^2\, du \right) dv = 2 \int_0^2 \left[\frac{1}{3}(u-v)^3 \right]_0^2 dv =$$

$$= \frac{2}{3} \int_0^2 \left((2-v)^3 + v^3 \right) dv = \frac{2}{3} \left[\frac{1}{4}v^4 - \frac{1}{4}(2-v)^4 \right]_0^2 = \frac{16}{3}$$

Svar: 16/3