

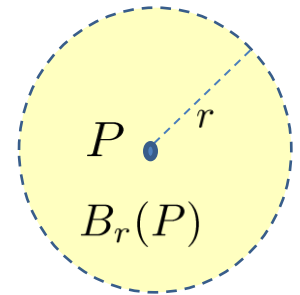
Flervariabelanalys E2/V2 TMA043/MVE085 läsåret 2012/13

Vägledning till lärmålen
Godkäntdelen, del 1

För att bli godkänd på kursen skall du kunna ...

- **förklara vad som menas med *omgivning* till en punkt i $\mathbb{R}^n$**

Förtydligande: Detta inbegriper att du är väl förtrogen med vad som menas med *avstånd* mellan punkter i $\mathbb{R}^n$. Du skall också kunna definiera begreppet *omgivning* och tolka det geometrisk i en, två resp. tre dimensioner. Du skall också kunna använda begreppet *omgivning* för att förklara varför en viss mängd är öppen eller sluten.



Några avsnitt, exempel och uppgifter som anknyter till detta lärmål:

Avsnitt: 10.1

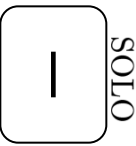
Exempel ur kursboken: -

Övningsuppgifter: 10.1: 3,5,11, K: 1,2,3

Gamla tentamensuppgifter: 120901.1a

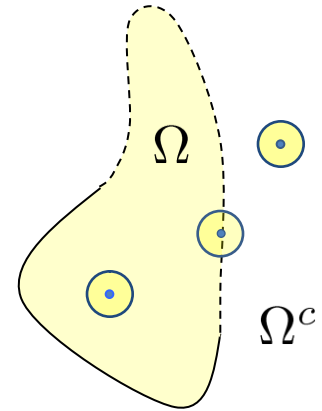
Lärmål 2

Del 1, för godkänt



- förklara vad som menas med *inre punkt*, *yttre punkt* och *randpunkt* till en mängd i $\mathbb{R}^n$

Förtydligande: Du skall kunna definiera ovanstående begrepp, samt utifrån given mängd kunna avgöra om en punkt är inre, yttre eller randpunkt. Du skall också veta vad som menas med *randen* till ett område.



Några avsnitt, exempel och uppgifter som anknyter till detta lärmål:

Avsnitt: 10.1

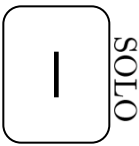
Exempel ur kursboken: Ett exempel finns i texten på sid 567

Övningsuppgifter: 10.1: 33-39, K: 4

Gamla tentamensuppgifter: 090605.1d

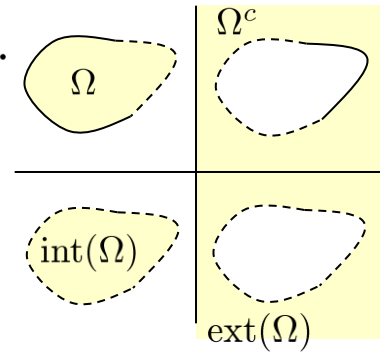
Lärmål 3

Del 1, för godkänt



- förklara vad som menas med *öppen*, *sluten*, *det inre/yttre* och *komplementet* av en mängd i $\mathbb{R}^n$

Förtydligande: Du skall kunna definiera ovanstående begrepp. Du skall också utifrån given mängd kunna bestämma dess rand, det inre resp. yttre och komplementet av mängden, samt veta hur dessa betecknas. Du skall också kunna avgöra om en mängd är öppen, sluten eller ingetdera.



Några avsnitt, exempel och uppgifter som anknyter till detta lärmål:

Avsnitt: 10.1

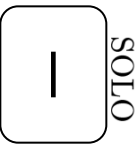
Exempel ur kursboken: Några exempel finns i texten på sid 567

Övningsuppgifter: 10.1: 33-39

Gamla tentamensuppgifter: 090605.1d, 120901.1a

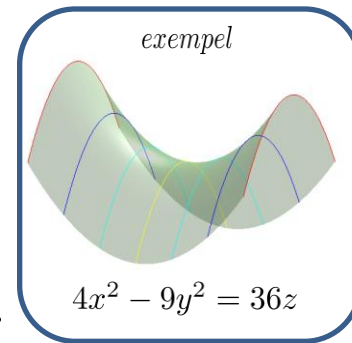
Lärmål 4

Del 1, för godkänt



- skissa plan, cylindriska ytor och andragsradsytur utgående från ytans ekvation samt ange vilken typ av yta ekvationen representerar

Förtydligande: De andragsradsytur som avses är sådana som tas upp i avsnitt 10.5. Du skall även känna till hur ekvationen förändras om ytan förflyttas i rummet och därmed kunna identifiera och skissa ytur som är inte är "centrerade kring origo" bl.a. genom kvadratkomplettering.



Några avsnitt, exempel och uppgifter som anknyter till detta lärmål:

Avsnitt: 10.1, 10.5

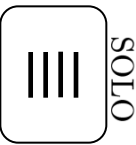
Exempel ur kursboken: 10.1: Ex.2,3, många illustrationer i avs. 10.5

Övningsuppgifter: 10.1: 15,17,21, 10.5: 1,3,5,7,11,13,15

Gamla tentamensuppgifter: 110112.1a

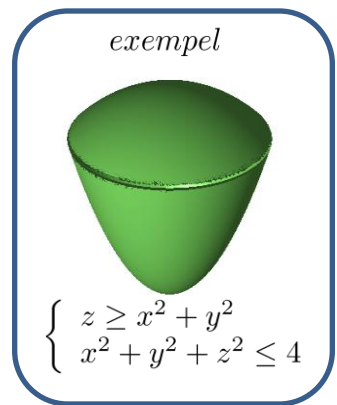
Lärmål 5

Del 1, för godkänt



- skissa kurvor, ytor och områden i rummet som beskrivs av system med ekvationer och/eller olikheter, där uttrycken är av typ som ingår i lärmål 4

Förtydligande: Du skall t.ex. kunna skissa på områden i rummet som begränsas av en eller flera andragradsytor och/eller plan. Du skall bl.a. också kunna skissa på ev. skärningskurva mellan två andragradsytor eller på skärningen mellan en andragradsyta och ett plan.



Några avsnitt, exempel och uppgifter som anknyter till detta lärmål:

Avsnitt: 10.1, 10.5

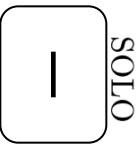
Exempel ur kursboken: 10.1: Ex.4,5

Övningsuppgifter: 10.1: 13,19,29,31,32, 10.5: 17,19

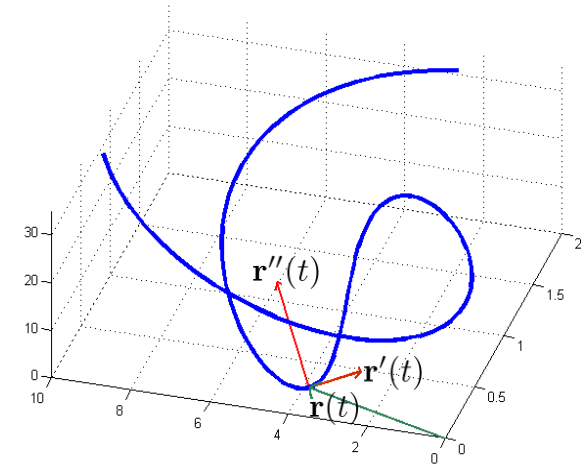
Gamla tentamensuppgifter: 090110.1d, 091024.1e

Lärmål 6

Del 1, för godkänt



- derivera vektorvärda funktioner av en variabel genom tillämpning av deriveringsreglerna, och därmed kunna bestämma kurvtangent, hastighet- och accelerationsvektor, samt fart till en partikel med given positionsvektor



Några avsnitt, exempel och uppgifter som anknyter till detta lärmål:

Avsnitt: 11.1

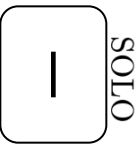
Exempel ur kursboken: 11.1: Ex.1,2,3,4,5,6

Övningsuppgifter: 11.1: 3,7,13

Gamla tentamensuppgifter: 100827.1b, 110917.1a, 120111.1c

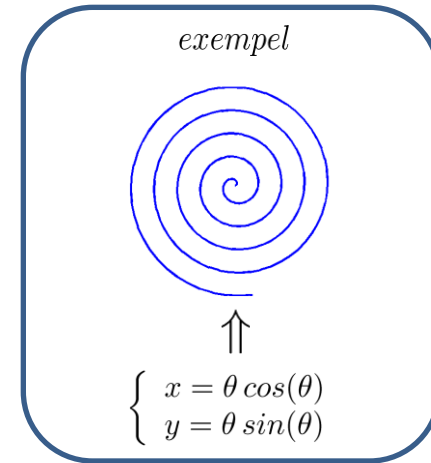
Lärmål 7

Del 1, för godkänt



- skissa plana kurvor utgående från given parametrisering

Förtydligande: Du bör även (för dig själv) kunna visualisera, och i ord beskriva, även de kurvor i $\mathbb{R}^3$ som finns i övningsuppgifterna. Det är inget krav, men ger god träning som underlättar förståelsen av vektorvärda funktioner.



Några avsnitt, exempel och uppgifter som anknyter till detta lärmål:

Avsnitt: 11.1

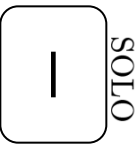
Exempel ur kursboken: 11.1: Ex.1 (Ex.2,3 för kurvor i rummet)

Övningsuppgifter: 11.1: 1,2,3, K: 8

Gamla tentamensuppgifter: 090828.2a, 120111.1c

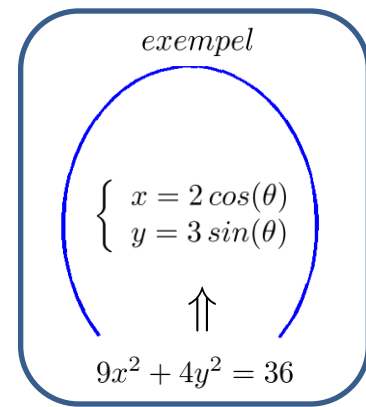
Lärmål 8

Del 1, för godkänt



- bestämma parametrisering av sträckor i planet och rummet, samt cirkelbågar, ellipser och funktionskurvor i planet. Du skall även (i enklare fall) kunna parametrisera skärningskurvor mellan ytor.

Förtydligande: Du skall också förstå på vilket sätt olika parametriseringar, av samma kurva, skiljer sig åt t.ex. bör du förstå vad det innebär om man byter t mot $2t$ i en given parametrisering $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$



Några avsnitt, exempel och uppgifter som anknyter till detta lärmål:

Avsnitt: 11.1, 11.3

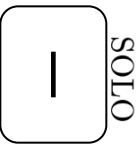
Exempel ur kursboken: 11.3: Ex.1,2,3,4,5

Övningsuppgifter: 11.3: 1,3,7, K: 5,6

Gamla tentamensuppgifter: 100115.2e, 100918.1a, 110827.1b
110827.5b, 120111.4

Lärmål 9

Del 1, för godkänt



- förklara vad som menas med *båglängdselement* och beräkna längden av kurvor

Förtydligande: Du skall ha en intuitiv känsla för vad båglängdselement är för något. Du skall också kunna bestämma båglängdselementet ds på formen $v(t)dt$, och beräkna längden av en kurva, givet en parametrisering $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ av kurvan. Om nödvändigt skall du också först kunna parametrisera kurvan om den är given på annat sätt (se lärmål 8).

$$s(b) = \int_C ds$$

$$s(a) = 0$$

$$s(t) = \int_a^t v(\tau) d\tau$$

Några avsnitt, exempel och uppgifter som anknyter till detta lärmål:

Avsnitt: 11.3

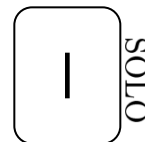
Exempel ur kursboken: 11.3: Ex.6

Övningsuppgifter: 11.3: 13, 14, 17, K: 7

Gamla tentamensuppgifter: 090110.1d, 110917.1a, 111020.1c

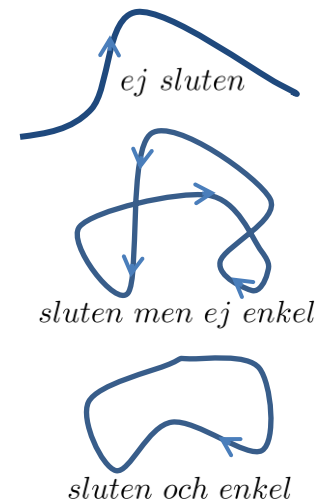
Lärmål 10

Del 1, för godkänt



- förklara vad som menas med *enkel sluten kurva*, samt vad som menas med *orientering* av en kurva

Förtydligande: Detta innebär att du känner till vad som menas med en *sluten kurva* och vad som gör att den betraktas som *enkel*. Du skall kunna avgöra om en given kurva är sluten och/eller enkel. Du skall kunna avgöra vilken orientering som följer med en given parametrisering och om så önskas kunna ändra i parametriseringen så att kurvan får motsatt orientering.



Några avsnitt, exempel och uppgifter som anknyter till detta lärmål:

Avsnitt: 11.3

Exempel ur kursboken: Några exempel i texten längst ner på sid 636

Övningsuppgifter: K: 8

Gamla tentamensuppgifter: -

- redogöra för funktionsbegreppen, begreppen *nivåkurva* och *nivåyta*, samt skissa enkla nivåkurvor/nivåytor

Förtydligande: Utöver begreppet *funktion* självt skall du känna till vad som menas med *definitionsområde* (*domain*), *värdemängd* (*range*) och *graf* till en funktion av flera variabler. Du skall känna till vad som menas med en nivåkurva till en funktion av två variabler, samt vad som menas med en nivåyta till en funktion av tre variabler.



Några avsnitt, exempel och uppgifter som anknyter till detta lärmål:

Avsnitt: 12.1

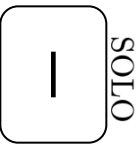
Exempel ur kursboken: 12.1: Ex.1,2,3,4,5,6,7

Övningsuppgifter: 12.1: 19,21,29-32, 37,38

Gamla tentamensuppgifter: 100827.1e, 110917.1c

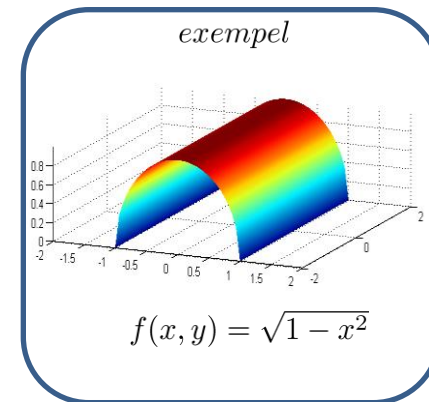
Lärmål 12

Del 1, för godkänt



- bestämma (den maximala) definitionsmängden för ett funktionsuttryck, samt skissa enkla funktionsytor

Förtydligande: Notera konventionen att man, om inget annat sägs, med definitionsmängd till en funktion menar alla värden på variablerna för vilket uttrycket är definierat som ett reellt tal (i enlighet med kända algebraiska regler och de elementära funktionernas naturliga definitionsmängd).



Några avsnitt, exempel och uppgifter som anknyter till detta lärmål:

Avsnitt: 12.1

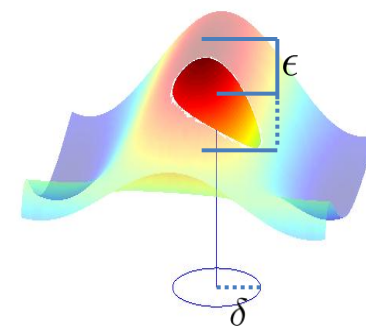
Exempel ur kursboken: 12.1: Ex.1,2

Övningsuppgifter: 12.1: 3,4,7,13,15,17

Gamla tentamensuppgifter: 100827.1e, 111020.1a

- ge en intuitiv beskrivning av begreppet *gränsvärde*

Förtydligande: Texten innan Definition 2 beskriver intuitivt hur vi vanligen ser på gränsvärdesbegreppet. Den duger dock inte som definition av begreppet gränsvärde eftersom den innehåller relativa begrepp som "nära sig". En ingenjör bör även känna till den mer exakta s.k. "epsilon-delta-definitionen" av gränsvärde i Definition 2, men det är inget krav för godkänt (dock för överbetyg)



Några avsnitt, exempel och uppgifter som anknyter till detta lärmål:

Avsnitt: 12.2

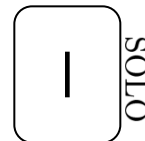
Exempel ur kursboken: -

Övningsuppgifter: 12.2: 1,5

Gamla tentamensuppgifter: 120111.1a

Lärmål 14

Del 1, för godkänt



- använda räkneregler för gränsvärden, för funktioner av två variabler

Förtydligande: För godkänt räcker det om du kan tillämpa räkneregler på ett direkt sätt (som i Ex1), utan omskrivningar, substitutioner, uppskattningar eller liknande. Mer komplicerade situationer som i Ex 3,4 & 5 är nyttiga för förståelsen av gränsvärden av funktioner av flera variabler men examineras endast genom överbetygsdelen och Matlab-övningar.

$$f(x, y) \rightarrow L, g(x, y) \rightarrow M$$

$$f(x, y) + g(x, y) \rightarrow L + M$$

Några avsnitt, exempel och uppgifter som anknyter till detta lärmål:

Avsnitt: 12.2

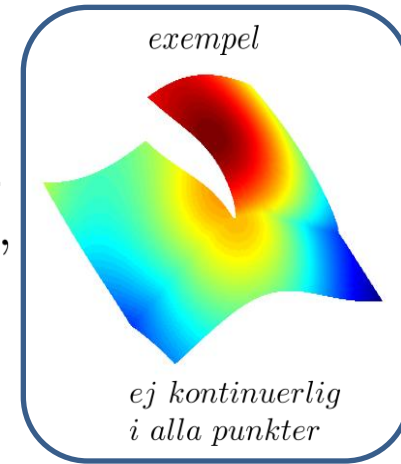
Exempel ur kursboken: 12.2: Ex.1,2

Övningsuppgifter: 12.2: 1,5

Gamla tentamensuppgifter: 091024.1b

- förklara vad som menas med att en funktion är kontinuerlig

Förtydligande: Du skall kunna definiera begreppet *kontinuitet* för funktioner av två variabler (Definition 3), samt kunna avgöra om en given funktion är kontinuerlig, i enkla fall där räkneregler för gränsvärde kan användas på ett direkt sätt (se Lärmål 14)



Några avsnitt, exempel och uppgifter som anknyter till detta lärmål:

Avsnitt: 12.2

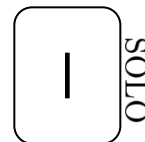
Exempel ur kursboken: 12.2: Ex.2, exempel i texten på sid 680

Övningsuppgifter: 12.2: 16, K: 12

Gamla tentamensuppgifter: 091024.1b

Lärmål 16

Del 1, för godkänt



- de olika beteckningarna för partiell derivata och beräkna partiella derivator genom att tillämpa deriveringsregler för funktioner av en variabel samt kedjeregeln

Förtydligande: Användningen av kedjeregeln innebär också att du kan hantera sammansättningar av funktioner av flera variabler. Du skall också förstå hur variabelbyten påverkar de partiella derivatorna. Du bör känna till definitionen av partiell derivata men det är inget krav för godkänt och du behöver därför inte kunna beräkna gränsvärden utgående från definitionen. Detta ingår dock i kravet för överbetyg.

$$g(s, t) = f(x(s, t), y(s, t))$$

$$g_2 = \frac{\partial g}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial t}$$

Några avsnitt, exempel och uppgifter som anknyter till detta lärmål:

Avsnitt: 12.3, 12.5

Exempel ur kursboken: 12.3: Ex.1,2,3,4,5, 12.5:1,2,3,4,5,6,7

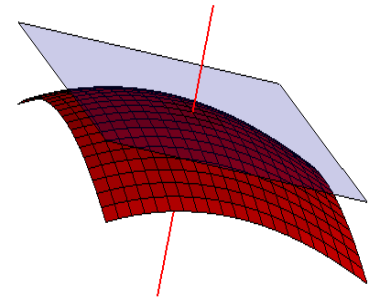
Övningsuppgifter: 12.3: 3,5,27,31, 12.5: 1,3,7,11,31

Gamla tentamensuppgifter: 081020.1c, 090110.1c, 090605.1c

090828.1b, 100115.1c, 100827.1a, 100918.1b, 110112.1b, 110827.1a
120901.1b

- bestämma tangentplan och normallinje till funktionsyta

Förtydligande: Detta inkluderar att du också kan bestämma normalvektor till en funktionsyta i given punkt.



Några avsnitt, exempel och uppgifter som anknyter till detta lärmål:

Avsnitt: 12.3

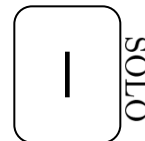
Exempel ur kursboken: 12.3: Ex.6,7,8

Övningsuppgifter: 12.3: 17,19,23, 12.7: 3b

Gamla tentamensuppgifter: 081020.1d, 100115.1a, 120111.1b

Lärmål 18

Del 1, för godkänt



- beräkna partiella derivator av högre ordning genom att tillämpa deriveringsregler för funktioner av en variabel samt kedjeregeln

Förtydligande: Du bör också känna till de viktiga differentialekvationerna; Laplace ekvation, samt våg- och värmeledningsekvationen, men det är inget krav för godkänt. Du skall dock kunna verifiera om en given funktion löser en viss differentialekvation (som t.ex. i Ex. 3 & 4).

$$f_{21} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial y}$$

Några avsnitt, exempel och uppgifter som anknyter till detta lärmål:

Avsnitt: 12.4, 12.5

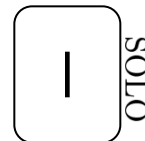
Exempel ur kursboken: 12.4: Ex.1,2,3,4, 12.5: Ex.8,9,10

Övningsuppgifter: 12.4: 5,7,11,18, 12.5: 15,17,19

Gamla tentamensuppgifter: 090828.1b, 100115.1c

Lärmål 19

Del 1, för godkänt



- beräkna linjäriseringen och differentialen för en reellvärd funktion och utnyttja dessa till approximativ beräkning av funktionsvärden

Förtydligande: Du skall tydligt kunna skilja på begreppen *linearisering* resp. *differential* av en funktion, trots att de i denna kurs ofta används för samma syfte.

$$df(\mathbf{x}, d\mathbf{x}) = \nabla f(\mathbf{x})d\mathbf{x}$$

$$f(\mathbf{a}) + \nabla f(\mathbf{a})(\mathbf{x} - \mathbf{a})$$

Några avsnitt, exempel och uppgifter som anknyter till detta lärmål:

Avsnitt: 12.6

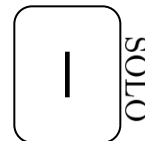
Exempel ur kursboken: 12.6: Ex.1,3

Övningsuppgifter: 12.6: 5,7,11

Gamla tentamensuppgifter: 090828.1c, 110917.1b

Lärmål 20

Del 1, för godkänt



- beräkna Jacobimatrisen och differentialen för en vektorvärd funktion och utnyttja denna till approximativ beräkning av funktionsvärden

Förtydligande: Detta lärmål utvidgar föregående lärmål till funktioner från $\mathbb{R}^n$ till $\mathbb{R}^m$. Notera att n inte behöver vara samma som m och att det är viktigt att Jacobimatrisen är av rätt typ dvs. en $m \times n$ -matris

$$f(\mathbf{x}) \approx f(\mathbf{a}) + Df(\mathbf{a})d\mathbf{x}$$

Några avsnitt, exempel och uppgifter som anknyter till detta lärmål:

Avsnitt: 12.6

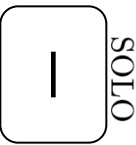
Exempel ur kursboken: 12.6: Ex.4

Övningsuppgifter: 12.6: 17,18,19

Gamla tentamensuppgifter: 090605.1e, 110112.1c

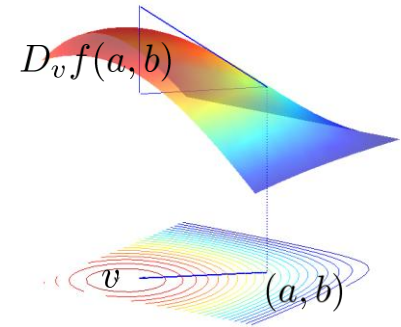
Lärmål 21

Del 1, för godkänt



- beräkna gradient och riktningsderivata $D_{\mathbf{u}}f(\mathbf{a})$, då $\|\mathbf{u}\| = 1$, till en funktion av två eller tre variabler, samt utnyttja deras egenskaper vid problemlösning

Förtydligande: Du bör känna till definitionen av riktningsderivata (för godkänt krävs dock inte att du redogör för den), men framför allt skall du kunna formeln för hur man kan beräkna riktningsderivata m.h.a. gradienten. Du skall kunna tolka begreppen geometriskt, samt ha en fysikalisk förståelse då funktionen har en fysikalisk tolkning. Speciellt skall du känna till egenskaperna (i), (ii) och (iii) i markerad ruta på sid 718, samt resultatet i Sats 6.



Några avsnitt, exempel och uppgifter som anknyter till detta lärmål:

Avsnitt: 12.7

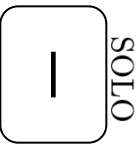
Exempel ur kursboken: 12.7: Ex.1,2,3,4a,5,6,7,8

Övningsuppgifter: 12.7: 3a,11,17,19,21a-d

Gamla tentamensuppgifter: 081020.5b, 090110.5a, 090605.1b, 090605.1c, 090828.1a, 100115.2b-e, 101021.1a, 110917.1c

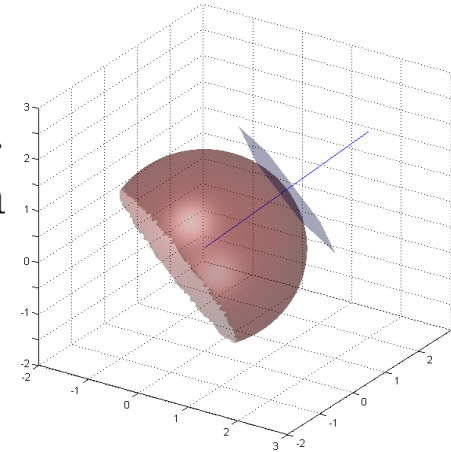
Lärmål 22

Del 1, för godkänt



- bestämma ekvationer för tangentlinje och normallinje till nivåkurva samt tangentplan och normallinje till nivåyta

Förtydligande: Detta inkluderar att du även kan bestämma normalvektor till nivåkurva och nivåyta. Det är viktigt att du har helt klart för dig vad som menas med en funktionskurva resp. nivåkurva och kan skilja dessa begrepp åt. Lika säkert måste du kunna skilja på begreppen funktionsyta och nivåyta.



Några avsnitt, exempel och uppgifter som anknyter till detta lärmål:

Avsnitt: 12.7

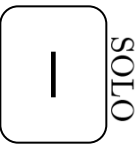
Exempel ur kursboken: 12.7: Ex.1,6b,7,8

Övningsuppgifter: 12.7: 3c,7, K: 9,10

Gamla tentamensuppgifter: 081020.1b, 090110.1b, 091024.1a
100918.1c, 101021.1c, 120901.1c

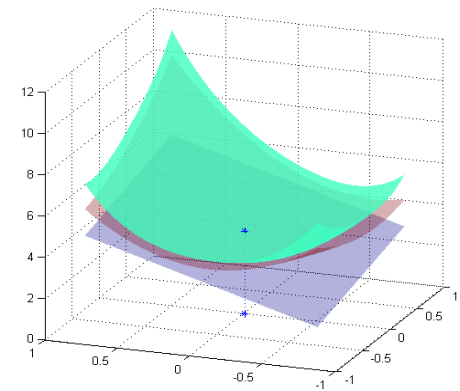
Lärmål 23

Del 1, för godkänt



- beräkna taylorpolynom av ordning två, till funktioner av två variabler, både genom att utgå från Taylors formel och genom att utnyttja kända Taylorpolynom i en variabel

Förtydligande: Du skall också kunna utnyttja Taylorutveckling för approximativ beräkning av funktionsvärden. För godkänt räcker det om du kan beräkna Taylorpolynom t.o.m. grad 2. Ordning 3 och högre, samt serieutveckling, krävs endast för överbetyg.



Några avsnitt, exempel och uppgifter som anknyter till detta lärmål:

Avsnitt: 12.9

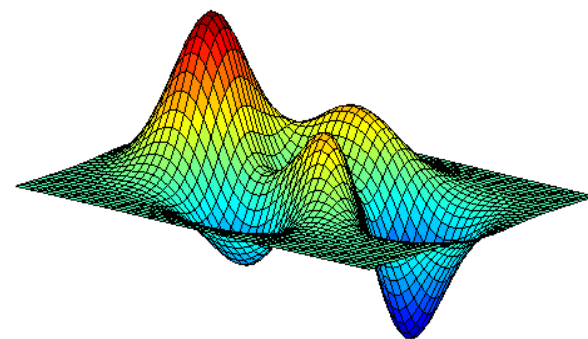
Exempel ur kursboken: 12.9: Ex.1,2

Övningsuppgifter: 12.9: 1,5,7 (grad 2 räcker)

Gamla tentamensuppgifter: 081020.5d, 090110.1a, 091024.1c
111020.1b

- definiera begreppen *lokalt maximum/minimum*, *sadelpunkt*, *globalt maximum/minimum*, *kritisk punkt* och *singulär punkt*

Förtydligande: Du skall kunna den exakta betydelsen av ovanstående begrepp. Speciellt skall du kunna avgöra, för en given funktion, om en viss punkt är kritisk/singulär.



Några avsnitt, exempel och uppgifter som anknyter till detta lärmål:

Avsnitt: 13.1

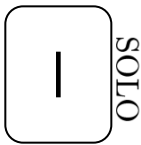
Exempel ur kursboken: 13.1: Ex.1,2,3,4

Övningsuppgifter: K: 11a-c

Gamla tentamensuppgifter: 081020.5d, 090110.4a, 090110.5a
100115.1b, 110827.1c, 111020.1a

Lärmål 25

Del 1, för godkänt



- **bestämna kritiska/stationära punkter för en funktion $f(x, y)$ av två variabler, där ekvationssystemet $\nabla f(x, y) = 0$ är relativt enkelt, samt klassificera de kritiska punkterna**

Förtydligande: Att klassificera en kritisk punkt är detsamma som att avgöra dess karaktär (lok. min/max eller sadelpunkt). Med "relativt enkelt" ekvationssystem menas system där man på ett enkelt sätt kan eliminera/substituera tills man får en ekvation med en obekant. För godkänt kommer man inte att behöva klassificera punkter för vilket kriterierna i Sats 3 inte räcker för att bestämma karaktär.

$$\nabla f(x, y) = 0$$

$$\mathcal{H}(a, b)$$

Några avsnitt, exempel och uppgifter som anknyter till detta lärmål:

Avsnitt: 13.1

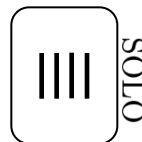
Exempel ur kursboken: 13.1: Ex.5,6,7,8,9

Övningsuppgifter: 13.1: 3,5,7,24

Gamla tentamensuppgifter: 081020.4a, 090110.4b, 090828.4
100115.1b, 100918.2a, 101021.1b, 110827.1c, 120111.2a

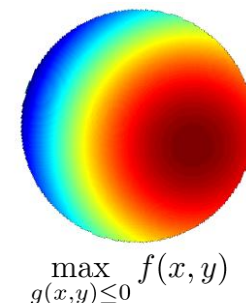
Lärmål 26

Del 1, för godkänt



- tillämpa sats 13.1.1 och sats 13.1.2 för att bestämma största och minsta värde på kompakt mängd för en funktion $f(x, y)$ av två variabler, då det är relativt enkelt att bestämma kritiska punkter samt största/minsta värde på randen

Förtydligande: Områdets rand kan t.ex. bestå av t.ex. linjestycken, ellipsbågar eller mer allmänt av funktionskurvor och/eller nivåkurvor. I det senare fallet kan Lagrange multiplikatormetod i avs. 13.3 vara användbar.



Några avsnitt, exempel och uppgifter som anknyter till detta lärmål:

Avsnitt: 13.2, 13.3

Exempel ur kursboken: 13.2: Ex.1,2,3,4,5

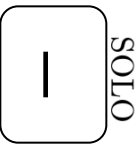
Övningsuppgifter: 13.2: 1,3,5,7

Gamla tentamensuppgifter: 081020.4b, 090605.2, 091024.2

100827.2, 100918.2b, 110112.2, 110917.2, 120111.2, 120901.2

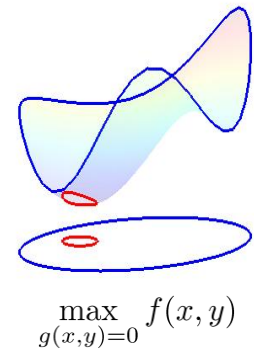
Lärsmål 27

Del 1, för godkänt



- bestämma extremvärden för funktioner $f(x, y)$ av två variabler, eller för funktioner $f(x, y, z)$ av tre variabler, under bivillkor av typen $g(x, y) = 0$, eller $g(x, y, z) = 0$, med Lagranges multiplikatormetod då den leder till relativt enkelt ekvationssystem

Förtydligande: Du skall inte bara kunna ta fram "kandidater" på punkter där max/min kan inträffa, utan även kunna argumentera för varför det största/minsta värde som "kandidaterna" ger också är det största/minsta värdet på funktionen under bivillkoren (då kan sats 13.1.2 vara till hjälp)



Några avsnitt, exempel och uppgifter som anknyter till detta lärmål:

Avsnitt: 13.3

Exempel ur kursboken: 13.3: 1,2,3,4

Övningsuppgifter: 13.3: 1,2,3,5,9

Gamla tentamensuppgifter: 081020.4b, 090110.5d, 101021.2
110827.2, 111020.2