MATEMATIK **Hjälpmedel: bifogat formelblad, utdelad ordlista, ej räknedosa**
Chalmers tekniska högskola Datum: Oktober 2008
Tentamensexempel Telefonvakt:
tel.

TMA043 Flervariabelanalys E2

Tentan rättas och bedöms anonymt. **Skriv tentamenskoden tydligt på placeringlista och samtliga inlämnade papper.** Fyll i omslaget ordentligt.
För godkänt på tentan krävs 25 poäng på tentamens första del (godkäntdelen) Bonuspoäng från duggor 08/09 räknas med, men maximal poäng på denna del är 32. För godkänt på kursen skall också Matlab-momentet vara godkänt.
För betyg 4 eller 5 krävs dessutom 33 resp. 42 poäng sammanlagt på tentamens två delar.

Del 1: Godkäntdelen

1. Denna uppgift finns på separat blad på vilket lösningar och svar skall skrivas. Detta blad inlämnas tillsammans med övriga lösningar.

2. Låt $\mathcal{C}$ vara randen till triangelområdet med hörn i punkterna $(0,0)$, $(1,0)$ och $(1,3)$ i xy-planet, orienterad moturs.

(a) Beräkna kurvintegralen $\oint_{\mathcal{C}}(x-y)dx + x^2ydy$ genom att parametrisera randbitarna och använda definitionen av kurvintegral. (3p)

(b) Använd Greens formel för att beräkna kurvintegralen i deluppgift (a). (3p)

3. Låt $\mathcal{S}$ vara den del av paraboloiden $z = 1 - x^2 - y^2$ som ligger ovanför xy-planet (dvs. där $z \geq 0$).

(a) Bestäm arean av $\mathcal{S}$. (3p)

(b) Bestäm flödet av $\mathbf{F} = y\mathbf{i} - x\mathbf{j} + |x|\,\mathbf{k}$ uppåt (i positiv z-led) genom ytan $\mathcal{S}$. (3p)

4. (a) Definiera begreppet, eller förklara på annat sätt, vad som menas med ett *lokalt maximum* till en funktion $f(x,y)$ (1p)

(b) Vilken/vilka av punkterna $(0,3)$, $(2,4)$, $(1,2)$, $(-3,-6)$ är kritisk (stationär) punkt för funktionen $f(x,y) = 8x^3 - 6x^2y - 3y^2 + 18y$? (3p)
Ange, för var och en av de kritiska punkterna (bland punkterna ovan), dess karaktär (lokalt max., lokalt min., sadelpunkt).

(c) Redogör för hur man bestämmer största och minsta värde för funktionen f i deluppgift (b) under bivillkoret $x^4+y^4 = 1$ med Lagranges multiplikatormetod. Erhållet ekvationssystem behöver *ej* lösas. (2p)

5. Avgör vilka av följande påståenden som är sanna respektive falska. Du behöver inte motivera dig. Rätt svar ger 1p, inget svar 0p och fel svar -1p. Dock ej mindre än 0p totalt. (4p)

(a) Nivåkurvorna $f(x,y) = 1$ och $f(x,y) = 2$ skär aldrig varandra.

(b) Vektorfältet i deluppgift 1e, d.v.s. $\mathbf{F} = \ln\frac{y}{z}\mathbf{i} - \frac{x}{y}\mathbf{j} + \frac{x}{z}\mathbf{k}$, är konservativt i området $D : x > 0,\ y > 0,\ z > 0$.

(c) Om $\mathcal{C}_1$ och $\mathcal{C}_2$ är två kurvor i xy-planet med samma start- och slutpunkt, samt samma längd, så är alltid $\int_{\mathcal{C}_1} f(x,y)ds = \int_{\mathcal{C}_2} f(x,y)ds$.

(d) Alla integraler (som behandlats i denna kurs) går att beräkna approximativt med Riemannsummor

Del 2: Överbetygsdelen

Uppgifterna i denna del rättas och bedöms endast om den första delen är godkänd. Uppgifterna

6. Visa att ekvationen $x + 2y + z + e^{2z} = 1$ implicit definierar en funktion $z = f(x, y)$ i en omgivning av punkten $(0, 0, 0)$. Bestäm sedan Taylorpolynomet av grad 2 till funktionen $f(x, y)$ i punkten $(0, 0)$. (6p)

7. Bestäm flödet av $\mathbf{F} = ze^y\mathbf{i} + xe^z\mathbf{j} + (y + z^2)\mathbf{k}$ genom den del av den sfäriska ytan $x^2 + (y - 1)^2 + z^2 = 4$ som ligger över xy-planet (dvs. där $z \geq 0$), då ytan är orienterad med uppåtriktad normalvektor (dvs. i positiv z-riktning). (6p)

8. Välj **en** av följande två deluppgifter (om det i dina lösningarna finns något redovisat från båda deluppgifterna så granskas endast den först redovisade). (6p)

(a) Motivera definitionen av *kurvintegral av ett vektorfält längs en kurva* samt formulera och bevisa Greens formel

(b) Definiera begreppet *differentierbar funktion* samt formulera och bevisa kedjeregeln för sammansatta funktioner av typen $f \circ g$, då $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ och $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

Lycka till!
Carl-Henrik F

1. Till nedanstående uppgifter skall korta lösningar redovisas, samt svar anges, på anvisad plats (endast lösningar och svar på detta blad, och på anvisad plats, beaktas).

(a) Använd differential för att beräkna $\mathbf{f}(1.01, -0.02)$ approximativt, då $\mathbf{f}$ är avbildningen $\mathbf{f}(x, y) = (y \ln x, xe^y)$ från $\mathbb{R}2$ till $\mathbb{R}2$ (2p)

Lösning:

Svar: ....

(b) Beräkna riktningsderivatan $D_{\mathbf{v}} f(\pi, \frac{1}{4})$ då $f(x, y) = x \sin xy$ och $\mathbf{v} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{i} - \mathbf{j})$ (2p)

Lösning:

Svar: ....

(c) Uttryck $\frac{\partial^2}{\partial u2} f(uv, 2u + 3v)$ i de partiella derivatorna av f. (2p)

Lösning:

Svar: ....

(d) Bestäm en ekvation för tangentplanet till nivåytan $xy + ze^{xy} + z3 = 2$ i punkten $(0, 2, 1)$ (2p)

Lösning:

Svar: ....

(e) Beräkna rotationen $\operatorname{curl} \mathbf{F}$ för vektorfältet $\mathbf{F} = \ln \frac{y}{z} \mathbf{i} - \frac{x}{y} \mathbf{j} + \frac{x}{z} \mathbf{k}$ (2p)

Lösning:

Svar: ....

Formelblad för TMA043 08/09

Trigonometri.

$$\cos(x+y) = \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y)$$

$$\sin(x+y) = \sin(x)\cos(y) + \cos(x)\sin(y)$$

$$\cos(x)\cos(y) = \frac{1}{2}(\cos(x-y) + \cos(x+y))$$

$$\sin(x)\sin(y) = \frac{1}{2}(\cos(x-y) - \cos(x+y))$$

$$\sin(x)\cos(y) = \frac{1}{2}(\sin(x-y) + \sin(x+y))$$

$$\tan(x+y) = \frac{\tan(x)+\tan(y)}{1-\tan(x)\tan(y)}$$

Integralkatalog

$$\int x^a dx = \frac{x^{a+1}}{a+1} + C \quad a \neq -1$$

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C$$

$$\int \sin x dx = -\cos x + C$$

$$\int \cos x dx = \sin x + C$$

$$\int \frac{1}{cos2x} dx = \tan x + C$$

$$\int \frac{1}{sin2x} dx = -\cot x + C$$

$$\int e^x dx = e^x + C$$

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C \quad 0 < a \neq 1$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x + C$$

$$\int \frac{1}{x^2+a2} dx = \frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a} + C \quad a \neq 0$$

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln|f(x)| + C$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+a}} dx = \ln|x + \sqrt{x^2+a}| + C \quad a \neq 0$$

$$\int \sqrt{x^2+a} dx = \frac{1}{2}(x\sqrt{x^2+a} + a\ln|x + \sqrt{x^2+a}|) + C$$

$$\int \frac{1}{(x^2+1)^n} dx = I_n$$

$$I_{n+1} = \frac{x}{2n(x^2+1)^n} + \frac{2n-1}{2n} I_n$$

Maclaurinutvecklingar

$$e^x = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + x^{n+1}B(x)$$

$$\sin x = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1}\frac{x^{2k-1}}{(2k-1)!} + x^{2n+1}B(x)$$

$$\cos x = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{k}\frac{x^{2k}}{(2k)!} + x^{2n+2}B(x)$$

$$(1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^{n} \binom{\alpha}{k} x^k + x^{n+1}B(x) \qquad |x| < 1$$

$$\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}x^k}{k} + x^{n+1}B(x) \qquad -1 < x \leq 1$$

$$\arctan x = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1}\frac{x^{2k-1}}{2k-1} + x^{2n+1}B(x) \qquad |x| \leq 1$$

$$\binom{\alpha}{k} = \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\ldots(\alpha-k+1)}{k(k-1)(k-2)\ldots 1} \qquad \binom{\alpha}{0} = 1$$

Övrigt

Tyngdpunkten (x_T, y_T, z_T) för Ω ges av $x_T = \frac{\iiint_\Omega x\rho(x,y,z)\,dxdydz}{\iiint_\Omega \rho(x,y,z)\,dxdydz}$, analogt för y_T, z_T.

$\rho(x,y,z)$ är densiteten.