Tentamen
TMA044 Flervariabelanalys E2

2015-08-28 kl. 8.30–12.30

Examinator: Peter Hegarty , Matematiska vetenskaper, Chalmers

Telefonvakt: Frida Svelander, telefon: 0703 088 304

Hjälpmedel: bifogat formelblad, ordlistan från kurswebbsidan, ej räknedosa

För godkänt på tentan krävs antingen 25 poäng på godkäntdelens två delar sammanlagt, eller att båda delarna är godkända var för sig. För godkänt på del 1 krävs minst 10 poäng, för godkänt på del 2 krävs 13 poäng. Erhållen poäng på någon av delarna får ersätta poäng på motsvarande del på senare tentamen tills kursen ges nästa läsår. För att få slutbetyg på kursen skall också Matlabmomentet vara godkänt. För betyg 4 eller 5 krävs dessutom 33 resp. 42 poäng sammanlagt på tentamens alla delar, inklusive eventuella bonuspoäng från kryssuppgifterna.

Lösningar läggs ut på kursens webbsida första vardagen efter tentamensdagen. Tentan rättas och bedöms anonymt. Resultat meddelas via Ladok ca. tre veckor efter tentamenstillfället. Första granskningstillfälle meddelas på kurswebbsidan, efter detta sker granskning alla vardagar 9-13, MV:s exp.

Godkäntdelen, del 1

Uppgift 1 och 2 se sidor 3-4

Godkäntdelen, del 2

Uppgift 3, 4 och 5 se sidor 5-6

Överbetygsdelen

Endast om man ligger enstaka poäng från godkänt och presterat riktigt bra på någon av följande uppgifter kan poäng på denna del räknas in för att nå godkäntgränsen. Normalt krävs för poäng på uppgift att man redovisat en fullständig lösningsgång, som i princip lett, eller åtminstone skulle kunnat leda, till målet.

6. ...... $x + y + 2z = 2$ skär ...... $z = x^2 + y^2$ i en ...... (fyll i de rätta orden !). Bestäm de punkter på skärningskurvan som ligger närmast och längst bort från origo. (5p)

Lösning: De rätta orden är, i tur och ordning, *Planet*, *paraboloiden* och *ellips.*

Vi söker max och min av funktionen $f(x, y, z) = x^2+y^2+z^2$ under bivillkoren $g_1 = g_2 = 0$ där $g_1(x, y, z) = x + y + 2z - 2$ och $g_2(x, y, z) = x^2 + y^2 - z$. Vi använder Lagranges multiplikatormetod och får följande fem ekvationer för x, y, z, λ, μ:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \lambda \frac{\partial g_1}{\partial x} + \mu \frac{\partial g_2}{\partial x} \Rightarrow 2x = \lambda + 2\mu x, \tag{1}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \lambda \frac{\partial g_1}{\partial y} + \mu \frac{\partial g_2}{\partial y} \Rightarrow 2y = \lambda + 2\mu y, \tag{2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \lambda \frac{\partial g_1}{\partial z} + \mu \frac{\partial g_2}{\partial z} \Rightarrow 2z = 2\lambda - \mu, \tag{3}$$

$$g_1(x, y, z) = x + y + 2z - 2 = 0, \tag{4}$$

$$g_2(x, y, z) = x^2 + y^2 - z = 0. \tag{5}$$

Från (1) och (2) får vi

$$\lambda = 2x(1 - \mu) = 2y(1 - \mu),$$

som ger två möjligheter:

FALL 1: $\mu = 1$, $\lambda = 0$.

Insättning i (3) ger $z = -\frac{1}{2}$, som säger emot (5). Detta fall gäller alltså ej.

FALL 2: $x = y$.

Insättning i (4) och (5) ger

$$z = 1 - x = 2x^2 \Rightarrow x = -1 \;\text{ eller }\; x = \frac{1}{2},$$

som ger de två punkterna $(-1,\,-1,\,2)$ och $\left(\frac{1}{2},\,\frac{1}{2},\,\frac{1}{2}\right)$. Vi beräknar slutligen

$$f(-1,\,-1,\,2) = 6, \qquad f\left(\frac{1}{2},\,\frac{1}{2},\,\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{4}$$

och eftersom $6 > \frac{3}{4}$ så måste $\left(\frac{1}{2},\,\frac{1}{2},\,\frac{1}{2}\right)$ vara den punkt på ellipsen som ligger närmast origo och $(-1,\,-1,\,2)$ vara den punkt som ligger längst bort.

7. (a) Ange och bevisa formeln för volymelementet i sfäriska koordinater. (3p)

(b) Låt $f(x,\,y)$ vara en funktion som är definierad på ett slutet, begränsat och sammanhängande område D i planet, och kontinuerlig däri. Formulera och bevisa medelvärdessatsen för f. (3p)

(c) Definiera vad som menas med att en funktion $f(x,\,y)$ är *differentierbar* i en punkt $(a,\,b)$. (1.5p)

Lösning (a): Se avsnitt 14.6 i boken, mer precis sidan 845.

(b): Se avsnitt 14.3 i boken, mer precis sidor 822-823.

(c): Se definition 5, avsnitt 12.6 i boken.

8. (a) Låt $\mathbf{F}(x,\,y,\,z) = 2z\mathbf{i} + 4x\mathbf{j} + 5y\mathbf{k}$. Bestäm $\oint_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$, där $\mathcal{C}$ är skärningen mellan $z = x + 4$ och $x^2 + y^2 = 4$, orienterad moturs sett uppifrån längs z-axeln. (4p)

(b) Låt $\mathbf{F}$ vara ett glatt vektorfält (dvs alla dess partiella derivator av alla ordningar är kontinuerliga, så inga konstigheter !) och $\mathcal{S}$ en sfär. Vad kan man säga om $\iint_{\mathcal{S}} \mathrm{curl}(\mathbf{F}) \cdot d\mathbf{S}$? Motivera ditt svar ! (1.5p)

Lösning (a): Stokes sats medför att

$$\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_{\mathcal{S}} (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot \hat{\mathbf{N}}\, dS, \tag{6}$$

där $\mathcal{S}$ är den del av planet $z = f(x,\,y) = x + 4$ som ligger innanför cylindern $x^2 + y^2 = 4$. Först har vi

$$\nabla \times \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 2z & 4x & z5y \end{vmatrix} = \cdots = 5\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 4\mathbf{k}. \tag{7}$$

Näst har vi

$$\hat{\mathbf{N}}\, dS = \pm(f_x,\, f_y,\, -1)\, dx\, dy = \pm(1,\, 0,\, -1)\, dx\, dy. \tag{8}$$

Eftersom vi går moturs längs $\mathcal{C}$ sett uppifrån så kommer $\mathcal{S}$ att ligger till vänster om färdriktningen, så $\hat{\mathbf{N}}$ ska peka upp från $\mathcal{S}$ och därmed ha en positiv z-komponent. Därför väljer vi minus tecknet i (8). Från (7) och (8) härleder vi sedan att

$$(\nabla \times \mathbf{F}) \cdot \hat{\mathbf{N}}\, dS = (5,\, -2,\, 4) \cdot (-1,\, 0,\, 1)\, dx\, dy = -\, dx\, dy.$$

Insättning i (6) ger att

$$\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = -\iint_{\pi(\mathcal{S})} dx\, dy$$

där $\pi(\mathcal{S})$ är projektionen av $\mathcal{S}$ på den del av xy-planet som begränsas av cylindern, dvs skivan $x^2 + y^2 \leq 4$. Så vi får slutligen

$$-\iint_{\pi(\mathcal{S})} dx\, dy = -\mathrm{Area}(\pi(\mathcal{S})) = -[\pi(2^2)] = -4\pi.$$

(b): Integralen är noll. Man kan se detta på olika sätt. Ett sätt är att använda Stokes sats och konstatera att sfären är randfritt. Alternativt, enligt Gauss sats så är

$$\iint_{\mathcal{S}} (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot d\mathbf{S} = \iiint_{\mathcal{B}} \nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{F})\, dV,$$

där $\mathcal{B}$ är klotet som innesluts av $\mathcal{S}$. Men för godtycklig $\mathbf{F}$ så är $\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{F}) = 0$, se Sats 16.2.3(g) i boken.

Formelblad för TMA043 och MVE085, 13/14

Trigonometri.

$$\cos(x+y) = \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y)$$

$$\sin(x+y) = \sin(x)\cos(y) + \cos(x)\sin(y)$$

$$\cos(x)\cos(y) = \frac{1}{2}(\cos(x-y) + \cos(x+y))$$

$$\sin(x)\sin(y) = \frac{1}{2}(\cos(x-y) - \cos(x+y))$$

$$\sin(x)\cos(y) = \frac{1}{2}(\sin(x-y) + \sin(x+y))$$

$$\tan(x+y) = \frac{\tan(x)+\tan(y)}{1-\tan(x)\tan(y)}$$

Integralkatalog

$$\int x^a\,dx = \frac{x^{a+1}}{a+1} + C \quad , \quad a \neq -1$$

$$\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + C$$

$$\int \sin x\,dx = -\cos x + C$$

$$\int \cos x\,dx = \sin x + C$$

$$\int \frac{1}{cos^2 x}\,dx = \tan x + C$$

$$\int \frac{1}{sin^2 x}\,dx = -\cot x + C$$

$$\int e^x\,dx = e^x + C$$

$$\int a^x\,dx = \frac{a^x}{\ln a} + C \quad , \quad 0 < a \neq 1$$

$$\int \frac{1}{x^2+a^2}\,dx = \frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a} + C \quad , \quad a \neq 0$$

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \ln|f(x)| + C$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{a-x^2}}\,dx = \arcsin\frac{x}{\sqrt{a}} + C \quad , \quad a > 0$$

$$\int \sqrt{a-x^2}\,dx = \frac{1}{2}x\sqrt{a-x^2} + \frac{a}{2}\arcsin\frac{x}{\sqrt{a}} + C \quad , \quad a > 0$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+a}}\,dx = \ln|x+\sqrt{x^2+a}| + C \quad , \quad a \neq 0$$

$$\int \sqrt{x^2+a}\,dx = \frac{1}{2}(x\sqrt{x^2+a} + a\ln|x+\sqrt{x^2+a}|) + C$$

Maclaurinutvecklingar

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{k!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$$

$$\sin x = \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}\frac{x^{2k-1}}{(2k-1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots$$

$$\cos x = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^{k}\frac{x^{2k}}{(2k)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots$$

$$(1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^{\infty}\binom{\alpha}{k}x^k = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \dots \quad , \quad |x| < 1 \quad , \quad \binom{\alpha}{k} = \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-k+1)}{k(k-1)\dots 1}$$

$$\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{x^k}{k} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots \quad , \quad -1 < x \leq 1$$

$$\arctan x = \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}\frac{x^{2k-1}}{2k-1} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots \quad , \quad |x| \leq 1$$

Övrigt

Masscentrum (x_T, y_T, z_T) för Ω ges av $x_T = \dfrac{\iiint_\Omega x\rho(x,y,z)\,dxdydz}{\iiint_\Omega \rho(x,y,z)\,dxdydz}$, analogt för y_T, z_T.

$\rho(x,y,z)$ är densiteten.

Anonym kod	TMA044 Flervariabelanalys E2 2015-08-28	sid.nummer	Poäng

Godkäntdelen: del 1

1. Till nedanstående uppgifter skall korta lösningar redovisas, samt svar anges, på anvisad plats (endast lösningar och svar på detta blad, och på anvisad plats, beaktas).

(a) Bestäm ekvationen för tangentplanet till ellipsoiden $\frac{x^2}{4} + y^2 + \frac{z^2}{9} = 3$ i punkten $(-2, 1, -3)$. (2p)

Lösning: Tangentplanets ekvation lyder

$$(f_x, f_y, f_z)\,|_{(x_0, y_0, z_0)} \cdot (x - x_0, y - y_0, z - z_0) = 0. \tag{9}$$

Här är $(x_0, y_0, z_0) = (-2, 1, -3)$ och $f(x, y, z) = \frac{x^2}{4} + y^2 + \frac{z^2}{9}$, så $f_x = \frac{x}{2}$, $f_y = 2y$, $f_z = \frac{2z}{9}$ och i punkten $(-2, 1, -3)$ gäller $f_x = -1$, $f_y = 2$, $f_z = -\frac{2}{3}$. Insättning i (9) ger

$$\left(-1, 2, -\frac{2}{3}\right) \cdot (x + 2, y - 1, z + 3) = 0 \Rightarrow \cdots \Rightarrow 3x - 6y + 2z = -18.$$

(b) Bestäm Taylorpolynomet av grad 2 i punkten $(1, 1)$ för funktionen $f(x, y) = e^{x^2-y}$ och använd detta för att uppskatta värdet av $f(1.1, 0.9)$. (3p)

Lösning: Vi har

$$f_x = 2xe^{x^2-y},\ \ f_y = -e^{x^2-y},\ \ f_{xx} = (2 + 4x^2)e^{x^2-y},\ \ f_{xy} = f_{yx} = -2xe^{x^2-y},\ \ f_{yy} = e^{x^2-y},$$

så i punkten $(1, 1)$ gäller

$$f = 1,\ \ f_x = 2,\ \ f_y = -1,\ \ f_{xx} = 6,\ \ f_{xy} = f_{yx} = -2,\ \ f_{yy} = 1. \tag{10}$$

Formeln för Taylorpolynomet av grad 2 lyder

$$f(a+h, b+k) \approx f(a, b)+[h \cdot f_x(a, b) + k \cdot f_y(a, b)]+\frac{1}{2}\left[h^2 \cdot f_{xx}(a, b) + 2hk \cdot f_{xy}(a, b) + k^2 \cdot f_{yy}(a, b)\right]. \tag{11}$$

Här är $(a, b) = (1, 1)$. Insättning av (10) in i (11) ger således Taylorpolynomet

$$f(1 + h, 1 + k) \approx 1 + (2h - k) + \frac{1}{2}(6h^2 - 4hk + k^2).$$

Slutligen om vi tar $h = 0.1$, $k = -0.1$, så får vi approximationen

$$f(1.1, 0.9) \approx 1 + [2(0.1) - (-0.1)] + \frac{1}{2}\left[6(0.1)^2 - 4(0.1)(-0.1) + (-0.1)^2\right] = \cdots = 1.355.$$

(c) Betrakta en partikel som rör sig för $t \geq 1$ enligt $\mathbf{r}(t) = t^2\mathbf{i} + 2t\mathbf{j} + (\ln t)\mathbf{k}$. Bestäm partikelns acceleration, både som vektor och skalär, vid $t = 2$. Bestäm även längden av banan som partikeln skär ut mellan $t = 1$ och $t = e^2$. (3p)

Lösning: Vi har

$$\mathbf{r}'(t) = 2t\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + \frac{1}{t}\mathbf{k}, \quad \mathbf{r}''(t) = 2\mathbf{i} - \frac{1}{t^2}\mathbf{k},$$
$$||\mathbf{r}''(t)|| = \sqrt{2^2 + \left(-\frac{1}{t^2}\right)^2} = \sqrt{4 + \frac{1}{t^4}}.$$

Vid $t = 2$ gäller

$$\mathbf{r}''(2) = 2\mathbf{i} - \frac{1}{4}\mathbf{k}, \quad ||\mathbf{r}''(2)|| = \sqrt{4 + \frac{1}{16}} = \frac{\sqrt{65}}{4}.$$

Banans längd ges av

$$\int_1^{e^2} ||\mathbf{r}'(t)||\, dt = \int_1^{e^2} \sqrt{(2t)^2 + 2^2 + \left(\frac{1}{t}\right)^2}\, dt = \int_1^{e^2} \sqrt{4t^2 + 4 + \frac{1}{t^2}}\, dt =$$
$$= \int_1^{e^2} \sqrt{\left(2t + \frac{1}{t}\right)^2}\, dt = \int_1^{e^2} \left(2t + \frac{1}{t}\right) dt = (t^2 + \ln t)\big|_1^{e^2} = (e^4 + 2) - (1 + 0) = e^4 + 1.$$

Till följande uppgift skall fullständig lösning redovisas på separat skrivpapper. Motivera och förklara så väl du kan.

2. Låt $f(x, y) = 2y\sqrt{x} - \ln y + x - 3y$.

(a) Funktionen f har två kritiska punkter. Bestäm och klassificera dessa. (4p)

(b) Om $x = s^2 + t^2$ och $y = \sin(s + t)$, bestäm $\frac{\partial f}{\partial s}$. (2p)

Lösning (a): I en kritisk punkt gäller

$$f_x = \frac{y}{\sqrt{x}} + 1 = 0, \tag{12}$$
$$f_y = 2\sqrt{x} - \frac{1}{y} - 3 = 0. \tag{13}$$

Ekv. (12) medför att $y = -\sqrt{x}$. Sätta in i (13) och låt $u := \sqrt{x}$ så får vi

$$2u + \frac{1}{u} - 3 = 0 \Rightarrow \frac{2u^2 - 3u + 1}{u} = 0 \Rightarrow 2u^2 - 3u + 1 = 0.$$

Denna kvadratiska ekvation har de två lösningarna $u = \frac{1}{2}$ och $u = 1$, som svarar mot $x = \frac{1}{4}$ och $x = 1$. Vi hade $y = -\sqrt{x}$ så de två kritiska punkterna är $\left(\frac{1}{4}, -\frac{1}{2}\right)$ och $(1, -1)$.

För klassificeringen behöver vi andraderivatorna

$$f_{xx} = -\frac{y}{2x\sqrt{x}}, \quad f_{xy} = f_{yx} = \frac{1}{\sqrt{x}}, \quad f_{yy} = \frac{1}{y^2}.$$

Fall 1: I punkten $\left(\frac{1}{4}, -\frac{1}{2}\right)$ så är $f_{xx} = 2$, $f_{xy} = 2$, $f_{yy} = 4$, så $f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2 = 4 > 0$. Dessutom är $f_{xx} > 0$ så vi har ett lokalt minimum.

Fall 2: I punkten $(1, -1)$ så är $f_{xx} = \frac{1}{2}$, $f_{xy} = 1$, $f_{yy} = 1$, så $f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2 = -\frac{1}{2} < 0$ och vi har en sadelpunkt.

(b): Enligt kedjeregeln,

$$\frac{\partial f}{\partial s} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s} = \left(\frac{y}{\sqrt{x}} + 1\right)(2s) + \left(2\sqrt{x} - \frac{1}{y} - 3\right)(\cos(s+t)) =$$
$$= 2s \cdot \left[\frac{\sin(s+t)}{\sqrt{s^2+t^2}} + 1\right] + \cos(s+t) \cdot \left[2\sqrt{s^2+t^2} - \frac{1}{\sin(s+t)} - 3\right].$$

Godkäntdelen: del 2

Till följande två uppgifter skall fullständiga lösningar redovisas på separata skrivpapper. Motivera och förklara så väl du kan.

3. Betrakta vektorfältet $\mathbf{F} = (y^2, -x^2)$. Räkna ut arbetet som $\mathbf{F}$ utför längs randen, orienterad moturs, till den del av enhetsdisken som ligger i övre högra kvadranten.

(a) genom att räkna ut kurvintegralerna direkt. (3p)

(b) genom att använda Greens sats. (2p)

Lösning (a): Välj (0, 0) som start- och slutpunkt. Randen ges av tre segment $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2$, $\mathcal{C}_3$, som kan parametriseras i moturs ordning enligt

$\mathcal{C}_1$: $\mathbf{r}(t) = (t,\, 0)$, $0 \le t \le 1$,

$\mathcal{C}_2$: $\mathbf{r}(t) = (\cos(t),\, \sin(t))$, $0 \le t \le \pi/2$,

$\mathcal{C}_3$: $\mathbf{r}(t) = (0,\, 1-t)$, $0 \le t \le 1$.

Arbetsintegralen längs $\mathcal{C}_1$ ges av $\int_0^1 (0^2,\, -t^2)\cdot(1,\, 0)\, dt = 0$. På liknande vis försvinner integralen längs $\mathcal{C}_3$. Integralen längs $\mathcal{C}_2$ ger å andra sidan

$$\int_0^{\pi/2} (\sin^2(t),\, -\cos^2 t)\cdot(-\sin(t),\, \cos(t))\, dt = -\int_0^{\pi/2} (\sin^3(t) + \cos^3(t))\, dt.$$

Av symmetri-skäl ger termerna i integranden samma svar (vilket också kan ses med variabelbytet $t \mapsto \pi/2 - t$), så vi koncentrerar oss på en av dem.

$$\begin{aligned}
\int_0^{\pi/2} \sin^3(t)\, dt &= \int_0^{\pi/2} \sin(t)(1-\cos^2(t))\, dt \\
&= \int_0^{\pi/2} \sin(t)\, dt - \int_0^{\pi/2} \cos^2(t)\sin(t)\, dt \\
&= [-\cos(t)]_0^{\pi/2} + \left[\frac{\cos^3(t)}{3}\right]_0^{\pi/2} = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3},
\end{aligned}$$

där i det sista ledet använde vi substitutionen $u = \cos(t), du = -\sin(t)\, dt$. Så svaret blir $-2\cdot\frac{2}{3} = -\frac{4}{3}$.

Lösning (b): Enligt Greens sats så är $\int_{rand} P\, dx + Q\, dy = \iint_{inre} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dA$. Alltså är arbetsintegralen given av $\iint_{inre}(-2x - 2y)\, dA$. Vi parametriserar det inre genom polära koordinater: $x = r\cos(t)$, $y = r\sin(t)$, $0 \le r \le 1$, $0 \le t \le \pi/2$, och $dA = r\, dr\, dt$. Alltså räknar vi ut:

$$\begin{aligned}
-2\int_0^1\int_0^{\pi/2} (r\cos(t) + r\sin(t))\, r\, dr\, dt &= -2\int_0^1 r^2 dr \int_0^1 (\cos(t) + \sin(t))\, dt \\
&= (-2)\cdot\frac{1}{3}\cdot 2 = -\frac{4}{3}, \quad \text{v.s.v.}
\end{aligned}$$

4. (a) Låt $\mathbf{F}(x, y, z) = (y^2 - ze^{-xyz}, xe^{z^2}, ye^{xy})$ och beräkna flödet ut ur kuben begränsad av $0 \le x, y, z \le 1$. (3p)

(b) Beräkna flödet av samma vektorfält $\mathbf{F}$ upp genom den sida av kuben som har $z = 1$. (2p)

Lösning (a): Enligt Gauss divergenssats så är

$$\iint_{rand} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{S} = \iiint_{inre} \operatorname{div}\mathbf{F}\, dV.$$

Här är $\operatorname{div}\mathbf{F} = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z} = yz^2 e^{-xyz}$. Vi ska alltså räkna ut integralen

$$\int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 yz^2 e^{-xyz}\, dx\, dy\, dz.$$

Här är det viktigt att välja rätt ordning på integrationen för att få något integrerbart. Vi först får

$$\int_0^1 yz^2 e^{-xyz}\, dx = \left[\frac{1}{-yz} yz^2 e^{-xyz}\right]_0^1 = -ze^{-yz} + z.$$

Sedan får vi

$$\int_0^1 (-ze^{-yz} + z)\, dy = \left[e^{-yz} + zy\right]_0^1 = e^{-z} + z - 1.$$

Den sista integralen ger $\int_0^1 (e^{-z} + z - 1)\, dz = \cdots = \frac{1}{2} - \frac{1}{e}$. Detta är det totala utflödet genom randen.

Lösning (b): Längs sidan $z = 1$ på kuben så är enhetsnormalen som pekar uppåt $\hat{\mathbf{N}} = (0, 0, 1)$. En parametrisering av sidan ges också av $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$, $z = 1$. Flödet ut ur sidan ges alltså av

$$\iint \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{N}}\, d\mathbf{S} = \int_0^1 \int_0^1 (y^2 - ze^{-xyz},\, xe^{z^2},\, ye^{xy}) \cdot (0, 0, 1)\, dx\, dy = \int_0^1 \int_0^1 ye^{xy}\, dx\, dy.$$

Integralen är av samma typ som i föregående uppgift, och vi understryker igen att det är viktigt att först integrera med avseende på x. Med samma metod får vi att flödet ut ur övre sidan med $z = 1$ ges av $e - 2$.

5. Till nedanstående uppgifter skall korta lösningar redovisas, samt svar anges, på anvisad plats (endast lösningar och svar på detta blad, och på anvisad plats, beaktas).

(a) Beräkna $\iint_D ye^{x^3} dA$ över området D i planet som begränsas av $y = 0$, $y = x$ och $x = 1$. (2p)

Lösning: Området kan parametriseras med $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq x$. Integralen vi får är

$$\int_0^1 \int_0^x ye^{x^3}\, dy\, dx.$$

Här är $\int_0^x ye^{x^3}\, dy = \left[\frac{y^2}{2} e^{x^3}\right]_0^x = \frac{x^2}{2} e^{x^3}$. Nu gör vi variabelbytet $u = x^3$, så att $du = 3x^2 dx$ och u går mellan 0 och 1. Då blir efter omskrivning integralen

$$\int_0^1 \frac{e^u}{6}\, du = \frac{e-1}{6}.$$

(b) i. Bestäm en potential till det konservativa vektorfältet (2p)

$$\mathbf{F}(x, y, z) = (2xy + yz, x^2 + xz + z, xy + y).$$

ii. Räkna ut arbetet som vektorfältet $\mathbf{F}$ utför längs en bana som börjar i $(0, 0, 0)$ och slutar i $(1, 1, 1)$. (1p)

Lösning (i): Vi söker en funktion f, så att

$$\nabla f = (f_x,\ f_y,\ f_z) = (2xy + yz,\ x^2 + xz + z,\ xy + y).$$

Genom att integrera första ekvationen med avseende på x får vi att $f = x^2y + xyz + g(y,\ z)$, där g bara beror på y och z. På samma sätt får vi från de andra två ekvationerna att $f = x^2y + xyz + zy + h(x,\ z)$ och $f = xyz + yz + k(x,\ y)$. För att detta ska vara konsekvent måste $f = x^2y + xyz + zy + C$, där C är någon konstant.

Lösning (ii): Eftersom vektorfältet är konservativt ges arbetet längs en godtycklig bana av skillnaden mellan potentialerna vid ändpunkterna. Dvs. $f(1,\ 1,\ 1) - f(0,\ 0,\ 0) = 3 - 0 = 3$.

(c) Låt R vara området i planet begränsat av $0 \le x$, $0 \le y$, $1 \le \frac{y}{x} \le 2$ och $1 \le xy \le 2$.

i. Räkna ut Jacobiandeterminanten $\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|$ för variabelbytet $u = \frac{y}{x}, v = xy$. (2p)
Hint: $x = \sqrt{\frac{v}{u}}, y = \sqrt{uv}$.

ii. Räkna ut $\iint_R \frac{y}{x}\, dA$. (1p)

Lösning (i): Den efterfrågade Jacobideterminanten ges av absolutbeloppet av determinanten av

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{v}}{2u^{3/2}} & \frac{1}{2\sqrt{uv}} \\ \frac{\sqrt{v}}{2\sqrt{u}} & \frac{\sqrt{u}}{2\sqrt{v}} \end{pmatrix}.$$

Determinanten ges således av $-\frac{\sqrt{v}}{2u^{3/2}}\frac{\sqrt{u}}{2\sqrt{v}} - \frac{1}{2\sqrt{uv}}\frac{\sqrt{v}}{2\sqrt{u}} = -\frac{1}{2u}$ och dess absolutbelopp av $\frac{1}{2u}$.

Lösning (ii): Enligt standardformeln för variabelbyten är

$$\iint_R \frac{y}{x}\, dx\, dy = \iint_R \frac{y}{x} \left|\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}\right| du\, dv.$$

Eftersom $y/x = u$, får vi att integralen, med de givna gränserna blir

$$\int_1^2 \int_1^2 u \frac{1}{2u}\, du\, dv = \frac{1}{2}.$$