# Omtentamen (med lösningar)
# TMA044 Flervariabelanalys E2

## 2016-01-04 kl. 8.30–12.30

**Examinator:** Daniel Persson, Fundamental fysik, Chalmers

**Telefonvakt:** Anna Persson, telefon: 0703 088 304

**Hjälpmedel:** endast bifogat formelblad, ej räknedosa

För godkänt på tentan krävs antingen 25 poäng på godkäntdelens två delar sammanlagt, eller att båda delarna är godkända var för sig. För godkänt på del 1 krävs minst 10 poäng, för godkänt på del 2 krävs 13 poäng. Erhållen poäng på någon av delarna får ersätta poäng på motsvarande del på senare tentamen tills kursen ges nästa läsår. För att få slutbetyg på kursen skall också Matlabmomentet vara godkänt. För betyg 4 eller 5 krävs dessutom 33 resp. 42 poäng sammanlagt på tentamens alla delar.

Lösningar läggs ut på kursens webbsida första vardagen efter tentamensdagen. Tentan rättas och bedöms anonymt. Resultat meddelas via Ladok ca. tre veckor efter tentamenstillfället. Första granskningstillfälle meddelas på kurswebbsidan, efter detta sker granskning alla vardagar 9-13, MV:s exp.

---

## Godkäntdelen, del 1

Uppgift 1 och 2 se sidan 3

## Godkäntdelen, del 2

Uppgift 3-7 se sidan 4

## Överbetygsdelen

Endast om man ligger enstaka poäng från godkänt och presterat riktigt bra på någon av följande uppgifter kan poäng på denna del räknas in för att nå godkäntgränsen. Normalt krävs för poäng på uppgift att man redovisat en fullständig lösningsgång, som i princip lett, eller åtminstone skulle kunnat leda, till målet.

**8**. Beskriv fältlinjerna till vektorfältet $\mathbf{F}(x, y, z) = (-y, x, x)$. (6p)

**Lösning:** Fältlinjernas ekvation ges av

$$\frac{dx}{-y} = \frac{dy}{x} = \frac{dz}{x}.$$

Från detta följer det att $xdx = -ydy$ och $dz/dy = 1$. Om vi integrerar den sista ekvationen får vi att $z = y + C$, där $C$ är en konstant. Om vi integrerar den första får vi $x^2/2 = -y^2/2 + D$, där $D$ är en konstant. Den sista kan skrivas om som $x^2 + y^2 = 2D$, dvs. ekvationen för en cirkel med radie $\sqrt{2D}$. Alltså ges fältlinjeekvationerna av snittet mellan cylindern $x^2 + y^2 = 2D$ och planet $y = z + C$, för varierande $C, D$.

**9**. Bevisa nedanstående:

(a) Greens sats över en rektangel $R$ i $\mathbb{R}^2$; (4p)

(b) Identiteten $\operatorname{div}\operatorname{curl} = 0$. (2p)

**Lösning:** Se boken eller föreläsningsanteckningarna.

**10**. Betrakta vektorfältet $\mathbf{F}(x,y) = \left(\frac{-y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}\right)$, definierat för alla $(x,y) \neq (0,0)$.

(a) Visa att $\operatorname{curl}\mathbf{F} = 0$, men att arbetsintegralen för alla slutna kurvor som går ett varv runt origo är icke-noll. (4p)

(b) Förklara varför $\mathbf{F}$ inte kan vara konservativ. (2p)

**Lösning:** Det är en enkel beräkning att $\operatorname{curl}\mathbf{F} = 0$ utanför origo. Vi kontrollerar först att den slutna kurvan parametriserad av $\mathbf{r}(t) = (\cos t, \sin t), 0 \leq t \leq 2\pi$ har en arbetsintegral som är icke-noll. Integralen blir i det fallet, $\int_0^{2\pi} \mathbf{F} \bullet \frac{d\mathbf{r}(t)}{dt} dt = \int_0^{2\pi} -\sin t(-\sin t)dt + \cos t + \cos t \cos t dt = \int_0^{2\pi} dt = 2\pi$. Givet en annan kurvan $\gamma$ som går exakt ett varv moturs runt origo, låt $D$ vara området mellan $\gamma$ och $\mathbf{r}(t)$. Enligt Greens sats är skillnaden mellan arbetsintegralerna längs $\gamma$ och $\mathbf{r}(t)$ en dubbelintegral över $D$, med integrand $\operatorname{curl}\mathbf{F} \bullet \mathbf{k} = 0$, alltså ger de samma svar.
Slutligen, $\mathbf{F}$ kan inte vara konservativ eftersom för konservativa vektorfält så är arbetsingraler enbart beroende av punkterna där kurvan börjar och slutar. Om nu vi tar två arbetsintegraler som börjar och slutar i $(1,0)$, t.ex. $\mathbf{r}(t)$ och den konstanta kurvan $\mathbf{l}(t) = (1,0)$, ser vi att i det ena fallet är arbetsintegralen $2\pi$, i det andra fallet 0. Alltså kan $\mathbf{F}$ inte vara konservativ.

## Formelblad för TMA044 och MVE085, 15/16

### Trigonometri.

$$\cos(x+y) = \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y)$$

$$\sin(x+y) = \sin(x)\cos(y) + \cos(x)\sin(y)$$

$$\cos(x)\cos(y) = \frac{1}{2}(\cos(x-y) + \cos(x+y))$$

$$\sin(x)\sin(y) = \frac{1}{2}(\cos(x-y) - \cos(x+y))$$

$$\sin(x)\cos(y) = \frac{1}{2}(\sin(x-y) + \sin(x+y))$$

$$\tan(x+y) = \frac{\tan(x)+\tan(y)}{1-\tan(x)\tan(y)}$$

### Integralkatalog

$$\int x^a\,dx = \frac{x^{a+1}}{a+1} + C \quad , \quad a \neq -1$$

$$\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + C$$

$$\int \sin x\,dx = -\cos x + C$$

$$\int \cos x\,dx = \sin x + C$$

$$\int \frac{1}{\cos^2 x}\,dx = \tan x + C$$

$$\int \frac{1}{\sin^2 x}\,dx = -\cot x + C$$

$$\int e^x\,dx = e^x + C$$

$$\int a^x\,dx = \frac{a^x}{\ln a} + C \;\; , \;\; 0 < a \neq 1$$

$$\int \frac{1}{x^2+a^2}\,dx = \frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a} + C \;\; , \;\; a \neq 0$$

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \ln|f(x)| + C$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{a-x^2}}\,dx = \arcsin\frac{x}{\sqrt{a}} + C \;\; , \;\; a > 0$$

$$\int \sqrt{a-x^2}\,dx = \frac{1}{2}x\sqrt{a-x^2} + \frac{a}{2}\arcsin\frac{x}{\sqrt{a}} + C \;\; , \;\; a > 0$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+a}}\,dx = \ln|x+\sqrt{x^2+a}| + C \;\; , \;\; a \neq 0$$

$$\int \sqrt{x^2+a}\,dx = \frac{1}{2}(x\sqrt{x^2+a} + a\ln|x+\sqrt{x^2+a}|) + C$$

### Maclaurinutvecklingar

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{k!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$$

$$\sin x = \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}\frac{x^{2k-1}}{(2k-1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots$$

$$\cos x = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{x^{2k}}{(2k)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots$$

$$(1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^{\infty}\binom{\alpha}{k}x^k = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \dots \quad , \quad |x| < 1 \quad , \quad \binom{\alpha}{k} = \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-k+1)}{k(k-1)\dots 1}$$

$$\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{x^k}{k} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots \quad , \quad -1 < x \leq 1$$

$$\arctan x = \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}\frac{x^{2k-1}}{2k-1} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots \quad , \quad |x| \leq 1$$

### Övrigt

Masscentrum $(x_T, y_T, z_T)$ för $\Omega$ ges av $x_T = \dfrac{\iiint_\Omega x\rho(x,y,z)\,dxdydz}{\iiint_\Omega \rho(x,y,z)\,dxdydz}$, analogt för $y_T, z_T$.

$\rho(x,y,z)$ är densiteten.

| Anonym kod | TMA044 Flervariabelanalys E2 2016-01-04 | sid.nummer | Poäng |
|---|---|---|---|
| | | | |

## Godkäntdelen: del 1

**1**. Till nedanstående uppgifter skall korta lösningar redovisas, samt svar anges, på separat skrivpapper.

(a) i. Ange om följande påstående om en godtycklig funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ är sant eller falskt. (0.5p)

**Påstående:** *Om gränsvärdet då* $(x, y) \to (a, b)$ *existerar, så är* $f(x, y) = f(a, b)$.

**Svar:** *Falskt* (ovanstående gäller endast om $f$ är kontinuerlig).

ii. Låt $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ vara en differentierbar funktion och studera ytan $z = f(x, y)$. Vilket eller vilka av följande påståenden om de partiella derivatorna är sanna? Ni får ringa in *max två alternativ* (bokstäver); för fler än två angivna alternativ blir det 0 poäng. Varje rätt svar ger 0.5p. (1p)

**A** Den partiella derivatan $f_1$ anger lutningen på tangentlinjen till kurvan som skär ytan $z = f(x, y)$ och planet $y =$ konst.

**B** Den partiella derivatan $f_1$ anger lutningen på tangentlinjen till kurvan som skär ytan $z = f(x, y)$ och planet $x =$ konst.

**C** Den partiella derivatan $f_2$ anger lutningen på tangentlinjen till kurvan som skär ytan $z = f(x, y)$ och planet $y =$ konst.

**D** Den partiella derivatan $f_2$ anger lutningen på tangentlinjen till kurvan som skär ytan $z = f(x, y)$ och planet $x =$ konst.

**Svar:** *Rätt svar är* **A, D**

(b) Bestäm ekvationen för tangentplanet till nivåytan $x^2+2y^2+2z^2 = 5$ i punkten $(1, 1, 1)$. (2p)

**Lösning:** För en nivåyta $f(x, y, z) = 0$ gäller det att tangentplanet i en punkt $(a, b, c)$ ges av $\nabla f(a, b, c) \bullet (x-a, y-b, c-z) = 0$. I det här fallet är $f(x, y, z) = x^2+2y^2+2z^2-5$, och $\nabla f = (2x, 4y, 4z)$. I punkten $(a, b, c) = (1, 1, 1)$ får vi således ekvationen

$$(2, 4, 4) \bullet (x - 1, y - 1, z - 1) = 2x - 2 + 4y - 4 + 4z - 4 = 0,$$

eller med andra ord $x + 2y + 2z = 5$.

(c) En partikel rör sig längs kurvan som parametriseras av $\mathbf{r}(t) = (2\cos t, \sin t, 1)$ med $0 \le t \le 2\pi$.

i. Beskriv kurvans geometriska form. (1p)

ii. Bestäm partikelns fart i punkten $t = \pi$. (1p)

iii. Skriv ner en integral vars värde ger kurvlängden mellan $t = 0$ och $t = 2\pi$. Du behöver ej beräkna integralen! (1p)

**Lösning:** Från kurvans parametrisering ser vi att $x/2 = \cos t, y = \sin t, z = 1$. Alltså gäller det att kurvan är ellipsen $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ liggandes i planet $z = 1$.
För en parametriserad kurva $\mathbf{r}(t)$ gäller att farten ges av $\|\mathbf{r}'(t)\|$. I detta fallet får vi $\mathbf{r}'(t) = (-2\sin t, \cos t, 0)$, så att farten blir $\sqrt{4\sin^2 t + \cos^2 t}$. Slutligen ges längden av kurvan av integralen $\int_0^{2\pi} \|\mathbf{r}'(t)\| dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{4\sin^2 t + \cos^2 t} dt$.

(d) Låt $f(x,y,z) = x^3y^2z$ och parametrisera riktningsvektorn med $\mathbf{r}(t) = e^t\mathbf{i} + \sin t\mathbf{j} + g(t)\mathbf{k}$, där $g(t)$ är en differentierbar funktion av $t$. Beräkna $\frac{d}{dt}f(\mathbf{r}(t))$. (2.5p)

**Lösning:** I allmänhet för en funktion $f(x(t), y(t), z(t))$ har vi enligt kedjeregeln

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{dz}{dt}. \tag{1}$$

Vi använder nu denna formel i vårt fall vilket ger

$$\begin{aligned}\frac{df}{dt} &= 3x^2y^2z \cdot e^t + 2x^3yz \cdot \cos t + x^3y^2 \cdot g'(t) \\ &= 3e^{3t}\sin^2 t\, g(t) + 2e^{3t}\sin t\, \cos t\, g(t) + e^{3t}\sin^2 t\, g'(t) \\ &= 3e^{3t}\, \sin t\,(\sin t\, g(t) + 2\cos t\, g(t) + \sin t\, g'(t)).\end{aligned} \tag{2}$$

**Till följande uppgift skall fullständig lösning redovisas på separat skrivpapper. Motivera och förklara så väl du kan.**

**2**. Låt $f(x,y) = 4x - 4y - x^2 - y^2$.

(a) Hitta och klassificera alla kritiska punkter till $f(x,y)$. (2p)

(b) Hitta max och min till $f(x,y)$ på disken $x^2 + y^2 \leq 2$. (2p)

(c) Bestäm Taylorpolynomet till $f(x,y)$ i punkten $(0,0)$ till andra ordningen i $h = x - 0$ och $k = y - 0$, dvs behåll termer upp till $h^2, k^2$ och $hk$. (2p)

**Lösning:** Vi börjar med att söka efter kritiska punkter till funktionen $f(x,y) = 4x - 4y - x^2 - y^2$. De partiella derivatorna ger:

$$f_1(x,y) = 4 - 2x = 0 \tag{3}$$

$$f_2(x,y) = -4 - 2y = 0. \tag{4}$$

vilket ger att $(x,y) = (2, -22)$. Eftersom

$$f_{11}(x,y) = -2, f_{12}(x,y) = 0, f_{22}(x,y) = -2$$

får vi att Hessianen ges av

$$H(f)(x,y) = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \tag{5}$$

Ur detta sluter vi att punkten är ett lokalt maximum.
Eftersom den enda globala kritiska punkten är i $(2,2)$ som är utanför disken $x^2 + y^2 \leq 2$, måste max och min ligga på randen. Den kan lättas parametriseras som $\mathbf{r}(t) = (\sqrt{2}\cos t, \sqrt{2}\sin t), 0 \leq t \leq 2\pi$. Insättning i $f$ ger $f(\mathbf{r}(t)) = 4\sqrt{2}\cos t - 4\sqrt{2}\sin t - 2\cos^2 t - 2\sin^2 t = 4\sqrt{2}\cos t - 4\sqrt{2}\sin t - 2$. Vi hittar kritiska punkter genom att hitta punkter $f'(\mathbf{r}(t)) = -4\sqrt{2}\sin t - 4\sqrt{2}\cos t = 0$ dvs. så att $\sqrt{2}\sin t = -\sqrt{2}\cos t$. Men om $x = \sqrt{2}\cos t, y = \sqrt{2}\sin t$ och $x = -y$, så gäller $x^2 + y^2 = 2x^2 = 2$, dvs. $(x,y) = (1,-1)$ eller $(-1,1)$. Insättning av dessa värden i $f(x,y)$ ger $f(1,-1) = 6$ och $f(-1,1) = -10$. Alltså måste $-10$ vara minimum och 6 vara maximum.
Vi har redan räknat ut alla relevanta partiella derivator, och insättning i standardformel för Taylor-utveckling ger

$$f(0+h, 0+k) \simeq 4x - 4y - x^2 - y^2. \tag{6}$$

| Anonym kod | TMA044 Flervariabelanalys E2 2016-01-04 | sid.nummer | Poäng |
|---|---|---|---|
| | | | |

## Godkäntdelen: del 2

**Till uppgift 5-6 nedan räcker det med kortare lösningsskiss men för uppgift 7-8 skall fullständiga lösningar redovisas. Motivera och förklara så väl du kan. Alla lösningar anges på separat skrivpapper.**

**3.** (a) Ange om följande är sant eller falskt.
**Påstående:** *Om* **F** *är ett vektorfält, så är fältlinjerna ortogonala till* **F**. (0,5p)

**Svar:** *Falskt* (fältlinjerna är parallella med **F**).

(b) Vilka av följande påståenden stämmer ? Varje rätt svar ger 0.5p. Du får max ange *2 alternativ*; vid fler än 2 angivna alternativ blir det 0p. *Det räcker att ange svar; ingen motivering behövs här.* (1p)

**A** Den generaliserade integralen av $e^{-x^2-y^2}$ över $\mathbb{R}^2$ konvergerar.

**B** Om $f$ är kontinuerlig över en sluten mängd så är $f$ integrerbar på samma mängd.

**C** $\phi(x,y,z) = yz + xz + xy$ är en potential till vektorfältet $\mathbf{F}(x,y,z) = (yz, xz, xy)$.

**D** $\phi(x,y,z) = xyz$ är en potential till vektorfältet $\mathbf{F}(x,y,z) = (yz, xz, xy)$.

**E** Potentialerna $\phi$ och $\phi + c$, där $c$ är en godtycklig funktion, motsvarar samma vektorfält.

**Svar:** **A** *och* **D** *stämmer.*

**4.** Låt $T$ vara randen, moturs orienterad, till triangeln vars hörn ligger i $(0,0), (1,0), (0,2)$. Räkna ut arbetsintegralen $\int_T \mathbf{F} \bullet d\mathbf{r}$, där $\mathbf{F}(x,y) = (y^2, -x^2)$ genom

(a) att parametrisera $T$ och direkt räkna ut integralen. (3p)

(b) att använda Greens sats. (2p)

**Lösning:(a)** Randen består av tre stycken linjestycken, $\ell_1, \ell_2, \ell_3$, som vi parametriserar som följer:

$$\begin{aligned} \ell_1 :&\quad \mathbf{r}(t) = (t, 0) &\quad 0 \le t \le 1 \\ \ell_2 :&\quad \mathbf{r}(t) = (1-t, 2t) &\quad 0 \le t \le 1 \\ \ell_3 :&\quad \mathbf{r}(t) = (0, 2-t) &\quad 0 \le t \le 2 \end{aligned}$$

I första fallet är dessutom $y = 0$ och $d\mathbf{r}(t) = (dt, 0)$, så $\mathbf{F} \bullet d\mathbf{r}(t) = y^2 dt = 0$. Av samma anledning ger arbetsintegralen över $\ell_3$ inget bidrag.
Således är det enda releventa segementet $\ell_2$. Här är $x = 1-t, y = 2t$ och $d\mathbf{r}(t) = (-1, 2)dt$, så $\mathbf{F} \bullet d\mathbf{r}(t) = (4t^2 * (-1) - (1-t)^2 * 2)dt = (-6t^2 + 4t - 2)dt$. Omskrivning av arbetsintegralen ger då

$$\int_{\ell_2} \mathbf{F} \bullet d\mathbf{r}(t) = \int_0^1 (6t^2 + 4t - 2)dt = \left[2t^3 + 2t^2 - 2t\right]_0^1 = -2.$$

**Lösning:(b)** Enligt Greens sats, om $R$ är det inre för triangeln och $\mathbf{F}$ ett godtyckligt vektorfält, så är $\int_T \mathbf{F} \bullet d\mathbf{r} = \iint_R [\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}] dxdy$. I detta fallet erhåller vi

$$\int_T \mathbf{F} \bullet d\mathbf{r} = \iint_R (-2x - 2y) dxdy.$$

Området $R$ kan parametriseras som $0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 2 - 2x$, så

$$\iint_R (-2x - 2y) dxdy = \int_0^1 \int_0^{2-2x} [-2x - 2y] dydx = \int_0^1 (4x - 4) dx = -2$$

**5.** Låt $S$ vara den del av ytan $z = 9 - x^2 - y^2$ som ligger ovanför $xy$-planet.

(a) Räkna ut arean till $S$ (2,5p)

(b) Räkna ut flödet upp genom $S$, för vektorfältet $\mathbf{F}(x, y, z) = (e^{yz}, x, e^{-x^2-y^2})$, genom att tillämpa Gauss divergenssats på lämpligt sätt. (3p)

**Lösning:(a)** Eftersom det är en funktionsyta ges ytarea-elementet av $dS = \sqrt{f_x^2 + f_y^2 + 1} dxdy = \sqrt{(-2x)^2 + (-2y)^2 + 1} dxdy = \sqrt{4x^2 + 4y^2 + 1} dxdy$. Vidare så området $S$ sådan att $x^2 + y^2 \leq 9$, vilket lättast parametriseras med polära koordinater: $x = r \cos t, y = r \sin t, dxdy = rdrdt$ och $0 \leq r \leq 3, 0 \leq t \leq 2\pi$. Alltså ska vi räkna ut integralen

$$\iint_S dS = \int_0^{2\pi} \int_0^3 \sqrt{4r^2 + 1} rdrdt = 2\pi \int_0^3 \sqrt{4r^2 + 1} rdr.$$

Detta görs också lättast med variabel-substitutionen $u = 4r^2 + 1$, så att $du/8 = rdr$ och

$$\int_0^3 \sqrt{4r^2 + 1} rdr = \frac{1}{8} \int_1^{28} \sqrt{u} du = \frac{1}{12} \left[ u^{3/2} \right]_1^{28} = \frac{1}{12} \left( 28^{3/2} - 1 \right).$$

Arean ges alltså av $\frac{\pi}{6} \left( 28^{3/2} - 1 \right)$.

**Lösning:(b)** Gauss divergenssats säger att för ett slutet område $R$ med rand $D$ och ett vektorfält $\mathbf{F}$ så är flödet ut genom $D$ givet av formeln

$$\iint_D \mathbf{F} \bullet d\mathbf{S} = \iiint_R \operatorname{div} \mathbf{F} dV.$$

I vårt fall vill vi välja $R$ till det slutna området mellan $S$ och $S_1$ som ges av $x^2 + y^2 \leq 9, z = 0$. Vi får då enligt Gauss

$$\iint_S \mathbf{F} \bullet d\mathbf{S} + \iint_{S_1} \mathbf{F} \bullet d\mathbf{S} = \iiint_R \operatorname{div} \mathbf{F} dV.$$

Eftersom $\operatorname{div} \mathbf{F} = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z} = 0$ i detta fallet, så får vi

$$\iint_S \mathbf{F} \bullet d\mathbf{S} = -\iint_{S_1} \mathbf{F} \bullet d\mathbf{S}.$$

Den sista integralen kan vi räkna ut, genom $d\mathbf{S} = \widehat{N}dS$ där $\widehat{N} = (0,0,-1)$ är enhetsnormalen pekandes utåt från $R$, och $dS = dxdy = rdrdt$ är ytarea-elementet över $S_1$ som vi parametriserar med samma polära koordinater som i del $(a)$. Då får vi att

$$\iint_{S_1} \mathbf{F}\bullet d\mathbf{S} = \int_0^{2\pi}\int_0^3 (e^{yz}, x, e^{-x^2-y^2})\bullet(0,0,-1)rdrdt = -\int_0^{2\pi}\int_0^3 e^{-r^2}rdrdt = -2\pi\int_0^3 e^{-r^2}rdr.$$

Vi räknar ut denna genom att sätta $u = r^2, du/2 = rdr$, vilket ger $-2\pi\int_0^3 e^{-r^2}rdr = -\pi\int_0^9 e^{-u}du = \pi(1-e^{-9})$. Således är

$$\iint_S \mathbf{F}\bullet d\mathbf{S} = -\iint_{S_1}\mathbf{F}\bullet d\mathbf{S} = \pi(e^{-9}-1).$$

**6**. Betrakta det konservativa vektorfältet

$$\mathbf{F}(x,y,z) = (2xyz - 6x\sin(y), x^2z - 3x^2\cos(y), x^2y + e^z).$$

(a) Hitta en potential till **F**. (2p)

(b) Räkna ut arbetet som **F** utför mellan punkten $(0,0,0)$ och $(1,1,1)$, längs kurvan $\mathbf{r}(t) = (t,t^2,t^3), 0 \le t \le 1$. (1p)

**Lösning:(a)** En potential ges av $\phi(x,y,z) = x^2yz - 3x^2\sin y + e^z$.

**Lösning:(b)** Arbetet som **F** utför beror bara på ändpunkterna, och ges av $\phi(1,1,1) - \phi(0,0,0) = 1 - 3\sin(1) + e - 1 = e - 3\sin(1)$.

**7**. Hitta masscentrum $(x_T, y_T, z_T)$ för området $R$ som ligger under ytan $z = \sqrt{1-x^2-y^2}$ och ovanför $xy$-planet, för den konstanta densiteten $\rho(x,y,z) = 1$. Se formelbladet för definitionen av masscentrum. (3p)

**Lösning:** Enligt formel så behöver vi räkna ut följande integraler

$$x_T = \frac{\iiint_R x\rho dV}{\iiint \rho dV},$$

$$y_T = \frac{\iiint_R y\rho dV}{\iiint \rho dV},$$

$$z_T = \frac{\iiint_R z\rho dV}{\iiint \rho dV}.$$

Man ser lätt att masscentrum för $x_T$ och $y_T$ båda är 0, pga. symmetri eller konkreta räkningar som är väldigt snarlika de som följer, så vi koncentrerar oss på den sista. Vi måste först räkna ut, eftersom $\rho = 1, \iiint_R dV$. Det är helt enkelt volymen av $R$, och eftersom området ges av $x^2+y^2+z^2 = 1, z \le 0$, är det hälften av volymen av en boll med radie 1, dvs. $2\pi/3$.
Slutligen måste vi också räkna ut $\iiint_R zdV$ som enklast görs genom att gå över i sfäriska koordinater: $x = R\cos\theta\sin\phi, y = R\sin\theta\cos\phi, z = R\cos\phi$ och gränserna ges av $0 \le R \le 1, 0 \le \theta \le 2\pi, 0 \le \phi \le \pi/2$. Eftersom $dV = R^2\sin\phi dRd\phi d\theta$ får vi att

$$\iiint_R zdV = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/2}\int_0^1 R^3\sin\phi\cos\phi dRd\phi d\theta = \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi/2}\sin 2\phi/2d\phi = \frac{\pi}{4}\left[-\cos(2\phi)/2\right]_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{4}.$$

Vi får alltså till slut att $z_T = \frac{\iiint_R z\rho dV}{\iiint \rho dV} = (\pi/4)/(2\pi/3) = 3/8$ och

$$(x_T, y_T, z_T) = (0,0,3/8).$$