Tentamen (med lösningar)
TMA044 Flervariabelanalys E2

2015-10-29 kl. 8.30–12.30

Examinator: Daniel Persson, Fundamental fysik, Chalmers

Telefonvakt: Mattias Lennartsson, telefon: 0703 088 304

Hjälpmedel: endast bifogat formelblad, ej räknedosa

För godkänt på tentan krävs antingen 25 poäng på godkäntdelens två delar sammanlagt, eller att båda delarna är godkända var för sig. För godkänt på del 1 krävs minst 10 poäng, för godkänt på del 2 krävs 13 poäng. Erhållen poäng på någon av delarna får ersätta poäng på motsvarande del på senare tentamen tills kursen ges nästa läsår. För att få slutbetyg på kursen skall också Matlabmomentet vara godkänt. För betyg 4 eller 5 krävs dessutom 33 resp. 42 poäng sammanlagt på tentamens alla delar.

Lösningar läggs ut på kursens webbsida första vardagen efter tentamensdagen. Tentan rättas och bedöms anonymt. Resultat meddelas via Ladok ca. tre veckor efter tentamenstillfället. Första granskningstillfälle meddelas på kurswebbsidan, efter detta sker granskning alla vardagar 9-13, MV:s exp.

Godkäntdelen, del 1

Uppgift 1 och 2 se sidan 3

Godkäntdelen, del 2

Uppgift 3-8 se sidor 4-5

Överbetygsdelen

Endast om man ligger enstaka poäng från godkänt och presterat riktigt bra på någon av följande uppgifter kan poäng på denna del räknas in för att nå godkäntgränsen. Normalt krävs för poäng på uppgift att man redovisat en fullständig lösningsgång, som i princip lett, eller åtminstone skulle kunnat leda, till målet.

9. Låt $\mathbb{F} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ vara ett överallt definierat vektorfält.

(a) Låt $\mathfrak{C}_1$ och $\mathfrak{C}_2$ vara två kurvor som börjar i en punkt P_1 och slutar i en punkt P_2. Använd Greens sats för att beräkna skillnaden $\int_{\mathfrak{C}_1} \mathbb{F} \cdot d\mathbf{r} - \int_{\mathfrak{C}_2} \mathbb{F} \cdot d\mathbf{r}$ i termer av dubbelintegraler. (4p)

(b) Använd ovanstående observation och lämpliga identiteter för att bevisa att om $\mathbb{F}$ är konservativt, så är arbetsintegralen oberoende av väg. (2p)

Lösning:

(a) Eftersom kurvan $\mathfrak{C}_1 - \mathfrak{C}_2$ är en sluten kurva (där notationen betyder att jag först går längs $\mathfrak{C}_1$ från början till slut, och sen tillbaka längs $\mathfrak{C}_2$, säger Greens sats att detta är en dubbelintegral över det inre R. Mer precist är

$$\int_{\mathfrak{C}_1 - \mathfrak{C}_2} \mathbf{F} \bullet d\mathbf{r} = \iint_R \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} dxdy.$$

(b) Antag att $\mathbf{F} = \nabla \phi$ för någon potential $\phi(x, y)$. Eftersom $\mathbf{curl F} \bullet \mathbf{k} = \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}$, följer det bland annat från 10c. Detta följer i sin tur från att blandade derivator kommuterar.

10. Låt $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ vara en funktion.

(a) Formulera definitionen av *differentierbarhet* för $f(x, y)$ i en punkt (a, b). (2p)

(b) Visa att om $f(x, y)$ är differentierbar i (a, b) så är $f(x, y)$ kontinuerlig i (a, b). (2p)

(c) Betrakta vektorfältet ∇f som ett vektorfält $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ genom att sätta z-komponenten till noll. Visa att $\mathbf{curl}\nabla f = \nabla \times (\nabla f) = 0$. (2p)

Lösning: Se boken.

11. Låt K vara en kon i $\mathbb{R}^3$: Basen till konen är ett område A i $z = 0$ och $P \in \mathbb{R}^3$ är spetsen till konen, så K ges av alla punkter på alla linjer som dras mellan P och A. Bevisa med hjälp av lämpliga verktyg från kursen att volymen till K är Area(A)*Höjden/3.

TIPS: *Det kan vara värt att börja med ett specialfall* (ger 2 poäng). (6p)

Lösning: Ett specialfall är när basen är en rektangel. Med lämplig parametrisering kan man sen visa att formeln stämmer i det fallet. Man kan sedan argumentera för att godtyckliga koner över A kan approximeras med summor av koner över de områden vi valt.
Ett mer allmänt fall: Låt oss skriva $a = Area(A)$. Låt P motsvara punkten $(0, 0, H)$; vi förlorar ingen generalitet genom att anta att spetsen ligger i origo i xy-planet. Låt $S(z)$ beteckna varje slice av konen vid ett visst z-värde. Låt $a_S(z)$ beteckna arean på $S(z)$. Vi vet att följande randvärden måste vara uppfyllda:

$$a_S(0) = a, \qquad a_S(H) = 0$$

eftersom vid $z = 0$ måste arean på slicen sammanfalla med den givna arean a på basen, och vid $z = H$, dvs i spetsen, måste arean vara noll. Dessutom vet vi att areor alltid skalar kvadratiskt med avståndet, dvs arean $a_S(z)$ måste vara proportionell mot a och ha ett kvadratiskt beroende på z. Kombinerar vi dessa observationer så drar vi slutsatsen att arean på varje slice måste vara

$$a_S(z) = \left(\frac{H - z}{H}\right)^2 a.$$

Volymen av K kan nu beräknas med trippelintegralen:

$$vol(K) = \iiint_K dV = \int_0^H dz \underbrace{\iint_{S(z)} dA}_{a_S(z)} = \int_0^H a_S(z) dz$$

$$= a \int_0^H \left(\frac{H - z}{H}\right)^2 dz = a\left[z - \frac{z^2}{H} + \frac{z^3}{3H^2}\right]_0^H = \frac{aH}{3}.$$

Formelblad för TMA044 och MVE085, 15/16

Trigonometri.

$$\cos(x+y) = \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y)$$

$$\sin(x+y) = \sin(x)\cos(y) + \cos(x)\sin(y)$$

$$\cos(x)\cos(y) = \frac{1}{2}(\cos(x-y) + \cos(x+y))$$

$$\sin(x)\sin(y) = \frac{1}{2}(\cos(x-y) - \cos(x+y))$$

$$\sin(x)\cos(y) = \frac{1}{2}(\sin(x-y) + \sin(x+y))$$

$$\tan(x+y) = \frac{\tan(x) + \tan(y)}{1 - \tan(x)\tan(y)}$$

Integralkatalog

$$\int x^a\,dx = \frac{x^{a+1}}{a+1} + C \quad , \quad a \neq -1$$

$$\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + C$$

$$\int \sin x\,dx = -\cos x + C$$

$$\int \cos x\,dx = \sin x + C$$

$$\int \frac{1}{\cos^2 x}\,dx = \tan x + C$$

$$\int \frac{1}{\sin^2 x}\,dx = -\cot x + C$$

$$\int e^x\,dx = e^x + C$$

$$\int a^x\,dx = \frac{a^x}{\ln a} + C \ , \ 0 < a \neq 1$$

$$\int \frac{1}{x^2+a^2}\,dx = \frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a} + C \ , \ a \neq 0$$

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \ln|f(x)| + C$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{a-x^2}}\,dx = \arcsin\frac{x}{\sqrt{a}} + C \ , \ a > 0$$

$$\int \sqrt{a-x^2}\,dx = \frac{1}{2}x\sqrt{a-x^2} + \frac{a}{2}\arcsin\frac{x}{\sqrt{a}} + C \ , \ a > 0$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+a}}\,dx = \ln|x + \sqrt{x^2+a}| + C \ , \ a \neq 0$$

$$\int \sqrt{x^2+a}\,dx = \frac{1}{2}(x\sqrt{x^2+a} + a\ln|x + \sqrt{x^2+a}|) + C$$

Maclaurinutvecklingar

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots$$

$$\sin x = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1}\frac{x^{2k-1}}{(2k-1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots$$

$$\cos x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k\frac{x^{2k}}{(2k)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots$$

$$(1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} x^k = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \ldots \quad , \quad |x| < 1 \quad , \quad \binom{\alpha}{k} = \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-k+1)}{k(k-1)\ldots 1}$$

$$\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1}\frac{x^k}{k} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots \quad , \quad -1 < x \leq 1$$

$$\arctan x = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1}\frac{x^{2k-1}}{2k-1} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \ldots \quad , \quad |x| \leq 1$$

Övrigt

Masscentrum (x_T, y_T, z_T) för Ω ges av $x_T = \dfrac{\iiint_\Omega x\rho(x,y,z)\,dxdydz}{\iiint_\Omega \rho(x,y,z)\,dxdydz}$, analogt för y_T, z_T.

$\rho(x,y,z)$ är densiteten.

Anonym kod	TMA044 Flervariabelanalys E2 2015-10-29	sid.nummer	Poäng

Godkäntdelen: del 1

1. Till nedanstående uppgifter skall korta lösningar redovisas, samt svar anges, på separat skrivpapper.

(a) Ange om följande påstående om en godtycklig funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ är sant eller falskt. (0.5p)

Påstående: *De inre punkterna (interiören) av en sluten boll är sluten*

Svar: *Falskt (interiören till en sluten mängd är öppen)*

(b) Låt $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ vara en differentierbar funktion. Vilket eller vilka av följande påståenden är sanna? Ni får ringa in *max tre alternativ* (bokstäver); för fler än tre angivna alternativ blir det 0 poäng. Varje rätt svar ger 0.5p. (1.5p)

A Om f har kontinuerliga partiella derivator i en omgivning till (a, b), så är f differentierbar i (a, b).

B Om f:s partiella derivator existerar i (a, b), så är f differentierbar i (a, b).

C Gradienten kan ses som en flervariabel analog till derivatan av en funktion $f(x)$.

D Hessianen kan ses som en flervariabel analog till derivatan av en funktion $f(x)$.

E Om U är en öppen mängd och begränsad mängd i $\mathbb{R}^2$, så existerar nödvändigtvis globalt max i U.

F Om U är en sluten mängd och begränsad mängd i $\mathbb{R}^2$, så existerar nödvändigtvis globalt max i U.

G Om U är en begränsad mängd i $\mathbb{R}^2$, så existerar nödvändigtvis globalt max i U.

Svar: *Rätt svar är* **A, C, F**

(c) Låt $f(x, y, z) = \sin(xy) + \cos(y) - xz$. Bestäm tangentplanet till ytan $f(x, y, z) = 0$ i punkten $(0, \pi/2, 1)$ och bestäm riktningsderivatan $D_u f$ till f i samma punkt och riktningen $u = (1, 0, 0)$. (3p)

Lösning: Tangentplanets ekvation ges av $\nabla f(0, \pi/2, 1) \cdot (x - 0, y - \pi/2, z - 1) = 0$. Här är $\nabla f = (y \cos(xy) - z, x \cos(xy) - \sin(y), -x)$. Alltså är

$$\nabla f(0, \pi/2, 1) = (\pi/2 - 1, -1, 0).$$

Följdaktligen blir ekvationen för tangentplanet

$$(\pi/2 - 1)x - (y - \pi/2) - 0 \cdot (z - 1) = 0.$$

Med lite omskrivning får vi att tangentplanet ges av $(\pi/2-1)x - y = -\pi/2$. Slutligen har vi att riktningsderivatan $D_u f(0, \pi/2, 1)$ ges av uttrycket

$$D_u f(0, \pi/2, 1) = u \cdot \nabla f(0, \pi/2, 1) = (1, 0, 0) \cdot (\pi/2-1, -1, 0) = (\pi/2-1) + 0 + 0 = \pi/2 - 1.$$

(d) Bestäm gränsvärdet

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \sin(h+k)/\ln(1+h+k).$$

TIPS: *Gör en första ordningens Taylor-utveckling av* $\sin(h+k)$ *och* $\ln(1+h+k)$. (4p)

Lösning: Första ordningens Taylorutvecklingar av $\sin(x)$ runt 0 ges av x, och för $\ln(1+x)$ av x. Sen har vi att $\sin(x) = x + \rho(x)$, där $\rho(x)$ är ett fel som är mindre än x, och på samma sätt $\ln(1+x) = x + \sigma(x)$. Mer precist är $\lim_{x\to 0} \rho(x)/x = 0$ och $\lim_{x\to 0} \sigma(x)/x = 0$. Insättning med $x = h+k$, ger alltså att

$$\sin(h+k)/\ln(1+h+k) = \frac{h+k+\rho(h+k)}{h+k+\sigma(h+k)}.$$

Om vi delar med $h+k$ i täljare och nämnare får vi $(1+\rho(h+k)/(h+k))\,/\,(1+\sigma(h+k)/(h+k))$. På grund av uppskattningarna för $\rho(x)/x$ och $\sigma(x)/x$, får vi att de termerna går mot noll då $(h,k) \to (0,0)$. Alltså är gränsvärdet 1. Man får full poäng även om man inte gjort uppskattningar.

Till följande uppgift skall fullständig lösning redovisas på separat skrivpapper. Motivera och förklara så väl du kan.

2. Använd Lagranges metod för att bestämma minsta avståndet från kurvan $g(x,y) = x^4 - y^4 = 0$ till punkten $(0,2)$.
TIPS: *Funktionen* $r = \sqrt{x^2+y^2}$ *är minimal på ett område exakt när* $f(x,y) = x^2+y^2$ *är minimal.* (5p)

Lösning: Vi vill alltså minimera funktionen $\sqrt{x^2+(y-2)^2}$ med bivillkoret $x^4 - y^4 = 0$. Om vi använder tipset, ser vi att vi kan beskriva Lagranges metod som att vi eftersöker kritiska punkter för

$$L(x,y,\lambda) = x^2 + (y-2)^2 + \lambda g(x,y).$$

Detta motsvarar ekvationerna

(a) $\frac{\partial L}{\partial x} = 2x + \lambda 4x^3 = 0.$

(b) $\frac{\partial L}{\partial y} = 2(y-2) - \lambda 4y^3 = 0$

(c) $\frac{\partial L}{\partial \lambda} = x^4 - y^4 = 0.$

Från ekvation 3 ser vi direkt att $x = y$ eller $x = -y$, speciellt är $x^2 = y^2$. I ekvation 1 är endera $x = 0$, vilket inte är kompatibelt med de andra ekvationerna, eller så är $1 + \lambda x^2 = 0$, dvs. $\lambda = -1/2x^2 = -1/2y^2$. Insättning av detta i ekvation 2 ger ekvationen $(y-2)+y = 0$, dvs. $y = 1$. Eftersom $x = \pm y$ får vi två möjliga minpunkter, $(1,1)$ och $(-1,1)$. Båda dessa har avstånd $\sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2}$ till punkten $(0,2)$.

Anonym kod	TMA044 Flervariabelanalys E2 2015-10-29	sid.nummer	Poäng

Godkäntdelen: del 2

Till uppgift 5-6 nedan räcker det med kortare lösningsskiss men för uppgift 7-8 skall fullständiga lösningar redovisas. Motivera och förklara så väl du kan. Alla lösningar anges på separat skrivpapper.

3. (a) Låt D vara ett område i $\mathbb{R}^3$. Vilka påståenden nedan är sanna om de sfäriska koordinaterna (ρ, θ, φ)? Varje rätt svar ger 0.5p. Du får max ange *2 alternativ*; vid fler än 2 angivna alternativ blir det 0p. *Det räcker att ange svar; ingen motivering behövs här.* (1p)

A $dV = \rho^2 \, d\rho \, d\theta \, d\varphi$

B $dV = \rho^2 \sin\varphi \, d\rho \, d\theta \, d\varphi$

C $0 \leq \theta \leq \pi$

D $0 \leq \varphi \leq \pi$

E $-\infty < \rho < \infty$

Svar: *Rätt svar är* **B**, **D**.

4. Låt $\mathbb{F}$ vara en konservativ kraft med potential ϕ definierad på en öppen sammanhängande domän D i xy-planet. Vilka av följande påståenden stämmer för $\mathbb{F}$? Varje rätt svar ger 0.5p. Du får max ange *2 alternativ*; vid fler än 2 angivna alternativ blir det 0p. *Det räcker att ange svar; ingen motivering behövs här.* (1p)

(a) **A** Eftersom $\mathbb{F}$ är konservativ så måste linjeintegralen över alla kurvor i D som sammanbinder två godtyckliga punkter i D att försvinna.

B Arbetet som $\mathbb{F}$ uträttar längs en sluten kurva i D är noll.

C Ekvipotentialkurvorna till $\mathbb{F}$ är alla vinkelräta mot fältlinjerna.

D Vektorn $\nabla\phi(x, y)$ är vinkelrät mot vektorn $\mathbb{F}(x, y)$ i punkten (x, y).

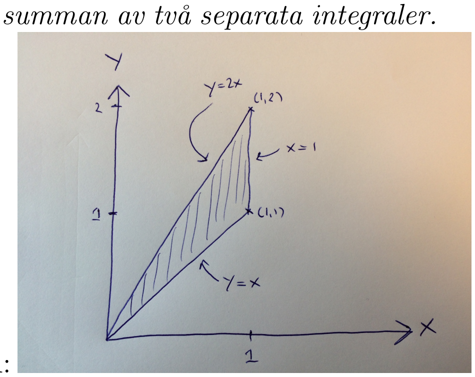
E Potentialerna ϕ och $\phi + c$, där c är en godtycklig funktion, motsvarar samma vektorfält.

Svar: *Rätt svar är* **B**, **C**.

5. (a) Rita upp integrationsregionen i integralen $I = \int_0^1 \int_x^{2x} dydx$, och ändra integrationsordningen så att I skrivs som en integral över $dxdy$ istället. (2p)

Tips: *När du byter ordning kommer I skrivas som summan av två separata integraler.*

Lösning. Integrationsregionen ser ut som på bilden:



När vi ändrar integrationsordning blir gränserna för y-variabeln: $0 \leq y \leq 2$. Dock kommer gränserna för x-variabeln att vara olika mellan $0 \leq y \leq 1$ och $1 \leq y \leq 2$. Således måste integralen delas upp i två delar då vi byter ordning:

$$I = \int_0^1 \int_{y/2}^{y} dxdy + \int_1^2 \int_{y/2}^{1} dxdy.$$

6. (a) Visa att $\mathbb{F}(x,y) = (3x^2-6y^2)\mathbf{i}+(-12xy+4y)\mathbf{j}$ är konservativ och ta fram en potential $\phi(x,y)$. (2p)

(b) Låt $\mathcal{C}$ vara kurvan i $\mathbb{R}^2$ som ges av $x = 1 + y^3(1-y)^3$ där $0 \leq y \leq 1$. Bestäm arbetet som $\mathbb{F}(x,y)$ utövar längs $\mathcal{C}$. (1p)

Lösning.

(a) Vi testar först om $\mathbb{F}$ är konservativt:

$$\frac{\partial F_2}{\partial x} = -12y = \frac{\partial F_1}{\partial y}.$$

En potential ges av:

$$\phi(x,y) = x^3 - 6xy^2 + 2y^2.$$

(b) Kurvan $\mathcal{C}$ startar i $(1,0)$ och slutar i $(1,1)$. Eftersom $\mathbb{F}$ är konservativt beror arbetet endast på ändpunkterna. Således får vi:

$$\int_{\mathcal{C}} \mathbb{F}\cdot d\mathbf{r} = \int_{\mathcal{C}} \nabla\phi\cdot d\mathbf{r} = \phi(1,1) - \phi(1,0) = -4.$$

7. (a) Använd Greens formel för att visa att ellipsen

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$$

har area πab. (3p)

Lösning. Greens formel säger allmänt att

$$\iint_D \nabla\times\mathbb{F}\cdot\mathbf{k}\,dA = \oint_{\partial D=\mathcal{C}} \mathbb{F}\cdot d\mathbf{r}$$

Arean av en domän D ges i sin tur av

$$area(D) = \iint_D dA$$

och för att kunna tillämpa Greens formel söker vi alltså ett vektorfält $\mathbb{F}(x,y)$ så att

$$\nabla\times\mathbb{F}\cdot\mathbf{k} = 1.$$

Ett möjligt val är

$$\mathbb{F}(x,y) = \frac{1}{2}(-y\mathbf{i} + x\mathbf{j}).$$

Med detta val ger Greens formel att arean kan uttryckas som linjeintegralen över kurvan $\mathcal{C}$ som omsluter D:

$$area(D) = \frac{1}{2}\int_{\mathcal{C}} (-y,x)\cdot(dx,dy) = \frac{1}{2}\int_{\mathcal{C}} (xdy - ydx).$$

För att beräkna denna måste vi parametrisera $\mathcal{C}$. I vårt exempel är $\mathcal{C}$ given av ellipsen och kan parametriseras enligt:

$$x = h + a\cos\theta, \qquad y = k + b\sin\theta, \qquad 0 \leq \theta \leq 2\pi.$$

Med denna parametrisering kan vi skriva linjeintegralen som

$$\frac{1}{2}\int_{\mathcal{C}} (xdy - ydx) = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \Big[(h + a\cos\theta)(b\cos\theta) - (k + b\sin\theta)(-a\sin\theta)\Big]d\theta$$

Genom att använda trigonometriska ettan $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$ kan vi förenkla detta till integralen

$$\frac{1}{2}\int_0^{2\pi} (hb\cos\theta + ak\sin\theta + ab)\,d\theta = \frac{1}{2}\Big[hb\sin\theta - ak\cos\theta + ab\theta\Big]_0^{2\pi}.$$

Vi får då slutligen

$$area(D) = \frac{1}{2}(hb\sin 2\pi - ak\cos 2\pi + ab2\pi - hb\sin 0 + ak\cos 0) = \pi ab,$$

där vi använt att $\sin 2\pi = \sin 0 = 0$ och $\cos 2\pi = \cos 0 = 1$.

8. Låt S vara den del av sfären $x^2+y^2+z^2 = 4$ som ligger *utanför* cylindern $x^2+y^2 = 1$ och låt $\mathbb{F}(x,y,z) = y\mathbf{i} - x\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ vara ett vektorfält.

(a) Beräkna flödet ut genom S av vektorfältet $\mathbb{F}(x,y,z)$. Du kan använda enhetsnormal $\hat{\mathbb{N}} = \frac{1}{2}(x,y,z)$ och det är rekommenderat att använda sfäriska koordinater; gränserna för φ blir: $\pi/6 \le \varphi \le 5\pi/6$. Notera att $\cos 5\pi/6 = -\sqrt{3}/2$ och $\cos\pi/6 = \sqrt{3}/2$. (4p)

(b) Visa att flödet av $\mathbb{F}(x,y,z)$ genom mantelytan av cylindern $x^2+y^2 = 1$ är noll. (2p)

(c) Använd Gauss sats för $\mathbb{F}(x,y,z)$ för att beräkna volymen av regionen som ligger mellan S och cylindern $x^2+y^2 = 1$. (2p)

Lösning:

(a) Vi skall beräkna flödet genom ytan S, vilket ges av flödesintegralen

$$\iint_S \mathbb{F}\cdot\hat{\mathbb{N}}dS.$$

Enhetsnormalen är given: $\hat{\mathbb{N}} = \frac{1}{2}(x,y,z)$. Den uppfyller mycket riktigt $|\hat{\mathbb{N}}| = 1$ eftersom på sfären har vi $x^2+y^2+z^2 = 4$. Vi använder sfäriska koordinater

$$x(\rho,\theta,\varphi) = \rho\sin\varphi\cos\theta, \quad y(\rho,\theta,\varphi) = \rho\sin\varphi\sin\theta, \quad z(\rho,\theta,\varphi) = \rho\cos\varphi.$$

Radien på sfären är $R = 2$ så vi kan därför sätta $\rho = R = 2$ i dessa formler. Flödesintegralen kommer således bli en integral över θ och φ. Gränserna för θ är de vanliga, $0 \le \theta \le 2\pi$, eftersom vi måste få med ytan runt hela sfären. Gränserna för φ var givna i uppgiften till $\pi/6 \le \varphi \le 5\pi/6$. Detta motsvarar vinkeln mellan där cylinderns topp skär sfären till där cylinderns botten skär sfären. Ytelementet för en sfär med radie R ges av

$$dS = R^2\sin\varphi\,d\theta\,d\varphi.$$

Om man inte kommer ihåg detta kan det lätt härledas från den allmänna formeln för ytelementet:

$$dS = \left|\frac{\partial\mathbf{r}(u,v)}{\partial u}\times\frac{\partial\mathbf{r}(u,v)}{\partial v}\right|du\,dv,$$

där $\mathbf{r}(u,v)$ parametriserar ytan. En sfär med fixerad radie $\rho = R$ parametriseras med $(u,v) = (\theta,\varphi)$ vilket ger

$$\mathbf{r}(\theta,\varphi) = x(R,\theta,\varphi)\mathbf{i} + y(R,\theta,\varphi)\mathbf{j} + z(R,\theta,\varphi)\mathbf{k}.$$

Detta ger att ytelementet dS på en sfär blir:

$$dS = \left|\frac{\partial\mathbf{r}(\theta,\varphi)}{\partial\theta}\times\frac{\partial\mathbf{r}(\theta,\varphi)}{\partial\varphi}\right|d\theta\,d\varphi = R^2\sin\varphi d\theta d\varphi.$$

Vi har nu alla ingredienser för att beräkna flödesintegralen:

$$\iint_S \mathbb{F}\cdot\hat{\mathbb{N}}dS = \frac{1}{2}\iint_S (y,-x,z)\cdot(x,y,z)dS = \frac{1}{2}\iint_S z^2 dS.$$

På sfären har vi $z = 2\cos\varphi$ vilket ger

$$\frac{1}{2}\int_0^{2\pi} d\theta \int_{\pi/6}^{5\pi/6} 2^2\cdot\cos^2\varphi\,\sin\varphi\cdot 2^2\cdot d\varphi = 8\cdot 2\pi\int_{\pi/6}^{5\pi/6}\cos^2\varphi\,\sin\varphi d\varphi.$$

Den primitiva funktionen till $\cos^2\varphi\,\sin\varphi$ är $-\frac{1}{3}\cos^3\varphi$ (man inser detta tex genom att byta variabler till $u = \cos\varphi$, $du = -\sin\varphi\, d\varphi$). Resultatet blir:

$$\iint_S \mathbb{F}\cdot\hat{\mathbb{N}}dS = 16\cdot\pi\Big[-\frac{\cos^3\varphi}{3}\Big]_{\pi/6}^{5\pi/6} = -\frac{16}{3}\pi\Big(\cos^3\,5\pi/6 - \cos^3\,\pi/6\Big) = 4\sqrt{3}\pi.$$

Svar på (a): Flödet ut genom S av $\mathbb{F}(x,y)$ är $4\sqrt{3}\pi$.

(b) För att beräkna flödet ut genom mantelytan på cylindern C behöver vi dess normal. En enhetsnormal ges av:

$$\hat{\mathbb{N}}_C = \pm(x,y,0).$$

Man kan ganska lätt gissa sig fram till normalen ovan. Annars kan man notera att cylindern är en nivåyta som kan beskrivas med $f(x,y,z) = x^2+y^2-1 = 0$. Således kan vi få en normalvektor genom att ta gradienten av f:

$$\mathbb{N}_C = \nabla f = (2x, 2y, 0).$$

Enhetsnormalen blir då

$$\hat{\mathbb{N}}_C = \pm\frac{\mathbb{N}_C}{|\mathbb{N}_C|} = \pm(x,y,0).$$

Eftersom

$$\mathbb{F}\cdot\hat{\mathbb{N}}_C = \pm(y,-k,z)\cdot(x,y,0) = \pm(xy - xy + 0) = 0$$

så ger detta att flödet genom cylindern alltid är noll:

$$\iint_C \mathbb{F}\cdot\hat{\mathbb{N}}_C dS = 0.$$

(c) Låt oss kalla regionen mellan ytan S och cylindern C för D. Eftersom $\nabla\cdot\mathbb{F} = 1$ kan vi använda Gauss sats för att beräkna volymen:

$$vol(D) = \iiint_D dV = \iiint_D \nabla\cdot\mathbb{F}dV = \oiint_{\partial D}\mathbb{F}\cdot\hat{\mathbb{N}}dS$$

Randen ∂D till D är unionen

$$\partial D = S\cup C$$

och således kan flödesintegralen i högerledet skrivas som

$$\oiint_{\partial D}\mathbb{F}\cdot\hat{\mathbb{N}}dS = \iint_S \mathbb{F}\cdot\hat{\mathbb{N}}dS + \iint_C \mathbb{F}\cdot\hat{\mathbb{N}}dS.$$

Men de två integralerna i högerledet är precis de flöden vi redan räknat ut i (a) och (b).

Således får vi för volymen av D:

$$vol(D) = \underbrace{\iint_S \mathbb{F} \cdot \hat{\mathbb{N}} dS}_{=4\sqrt{3}\pi} + \underbrace{\iint_C \mathbb{F} \cdot \hat{\mathbb{N}} dS}_{=0} = 4\sqrt{3}\pi.$$

Svar på (c): Volymen av regionen D mellan cylindern C och ytan S är $4\sqrt{3}\pi$.