Tentamen
TMA044 Flervariabelanalys E2

2016-09-24 kl. 8.30–11.30

Examinator: Magnus Goffeng , Matematiska vetenskaper, Chalmers

Telefonvakt: Johannes Borgqvist, telefon: 5325

Hjälpmedel: bifogat formelblad, ej räknedosa

För godkänt på tentan krävs antingen 25 poäng på godkäntdelens två delar sammanlagt, eller att båda delarna är godkända var för sig. För godkänt på del 1 krävs minst 10 poäng, för godkänt på del 2 krävs 13 poäng. Erhållen poäng på någon av delarna får ersätta poäng på motsvarande del på senare tentamen tills kursen ges nästa läsår. För att få slutbetyg på kursen skall också Matlabmomentet vara godkänt. För betyg 4 eller 5 krävs dessutom 33 resp. 42 poäng sammanlagt på tentamens alla delar.

Lösningar läggs ut på kursens webbsida första vardagen efter tentamensdagen. Tentan rättas och bedöms anonymt. Resultat meddelas via Ladok ca. tre veckor efter tentamenstillfället. Första granskningstillfälle meddelas på kurswebbsidan, efter detta sker granskning alla vardagar 9-13, MV:s exp.

Godkäntdelen, del 1

Se uppgift 1 och 2 på nästa blad

Anonym kod	TMA044 Flervariabelanalys E2 2016-09-24	sid.nummer	Poäng

Godkäntdelen: del 1

1. Till nedanstående uppgifter skall korta lösningar redovisas, samt svar anges, på anvisad plats. Endast lösningar och svar på detta blad, och på anvisad plats, beaktas.

(a) Ange vilka av följande påståenden som är korrekta.

i) Om en funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ har kontinuerliga partiella derivator i en omgivning av en punkt $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ så är f differentierbar i (a, b). (1p)

Svar: Sant. Se sats 12.6.4 i Adams.

ii) Vilka av följande påståenden är korrekta? Varje rätt svar ger 0.5 poäng. Ni får ange två svar. För fler än två svar blir det 0 poäng. (1p)

A Om (x_0, y_0) är ett maximum till en funktion f definierad på en kompakt domän i planet så är $\nabla f(x_0, y_0) = 0$.

B Om $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ är kontinuerlig och $\lim_{(x,y)\to\infty} f(x, y) = 0$ så har f ett största eller minsta värde.

C Gradienten av en funktion är en linjär approximation av funktionen.

D En partikel med konstant fart har ingen acceleration.

Svar: De korrekta påståendena är **B** och **C**. I **A** är påståendet falskt då maximum kan uppnås på randen till den kompakta domänen. I **D** är exempelvis $(\cos(t), \sin(t))$ exempel på en parametrising där farten är konstant men acceleration är icke-konstant.

iii) Mängden av yttre punkter till en öppen boll är sluten. (1p)

Svar: Falskt. De yttre punkterna till en mängd utgör alltid en öppen mängd då de är de inre punkterna till komplementet, dvs alla punkter utanför mängden som inte är randpunkter.

(b) Låt $g(x, y, z) := e^{zy} - e^{yx} + e^{xz} + \frac{1}{4}$. Bestäm tangentplanet till ytan i $\mathbb{R}^3$ definierad av ekvationen $g(x, y, z) = 0$ i punkten $\left(1, 2, \log\left(e - \frac{1}{2}\right)\right)$. (2p)

Lösning:
Vi räknar ut

$$\nabla g(x, y, z) = \begin{pmatrix} ze^{xz} - ye^{yx} \\ ze^{yz} - xe^{yx} \\ xe^{xz} + ye^{yz} \end{pmatrix}.$$

Då är normalvektorn i punkten $\left(1, 2, \log\left(e - \frac{1}{2}\right)\right)$given av

$$\mathbf{n} = \nabla g\left(1, 2, \log\left(e - \frac{1}{2}\right)\right) = \begin{pmatrix} \log\left(e - \frac{1}{2}\right)\left(e - \frac{1}{2}\right) - 2e^2 \\ \log\left(e - \frac{1}{2}\right)\left(e - \frac{1}{2}\right)^2 - e^2 \\ \left(e - \frac{1}{2}\right) + 2\left(e - \frac{1}{2}\right)^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}.$$

Därmed ges normalen av ekvationen $\mathbf{n}\cdot(x-1, y-2, z-\log\left(\mathrm{e}-\frac{1}{2}\right))=0$ vilket skrivs om och ger svaret som planet

$$ax+by+cz = a+2b+\log\left(\mathrm{e}-\frac{1}{2}\right)c.$$

Om man så vill kan man förenkla:

$$\begin{aligned}
a+2b+\log\left(\mathrm{e}-\frac{1}{2}\right)c =&\log\left(\mathrm{e}-\frac{1}{2}\right)\left(\mathrm{e}-\frac{1}{2}\right)-2\mathrm{e}^2+2\log\left(\mathrm{e}-\frac{1}{2}\right)\left(\mathrm{e}-\frac{1}{2}\right)^2-2\mathrm{e}^2\\
&+\log\left(\mathrm{e}-\frac{1}{2}\right)\left(\mathrm{e}-\frac{1}{2}\right)+2\log\left(\mathrm{e}-\frac{1}{2}\right)\left(\mathrm{e}-\frac{1}{2}\right)^2\\
=&2\left(\log\left(\mathrm{e}-\frac{1}{2}\right)\left(\mathrm{e}-\frac{1}{2}\right)-2\mathrm{e}^2+2\log\left(\mathrm{e}-\frac{1}{2}\right)\left(\mathrm{e}-\frac{1}{2}\right)^2\right)\\
=&4e\left(\log\left(\mathrm{e}-\frac{1}{2}\right)\left(\mathrm{e}-\frac{1}{2}\right)-\mathrm{e}\right).
\end{aligned}$$

(c) Bestäm längden av kurvan $\mathbf{r}(t)=x(t)\mathbf{i}+y(t)\mathbf{j}+z(t)\mathbf{k}$, $1\leq t\leq 2$, där $x(t)=t^2$, $y(t)=2^{3/2}t$ och $z(t)=2\log(t)$. (3p)

Lösning: Vi räknar ut att

$$\mathbf{r}'(t)=2t\mathbf{i}+2^{3/2}\mathbf{j}+\frac{2}{t}\mathbf{k}.$$

Därmed är

$$|\mathbf{r}'(t)|^2=4t^2+8+\frac{4}{t^2}=4\left(t+\frac{1}{t}\right)^2.$$

Vi får att farten ges av $|\mathbf{r}'(t)|=2\left(t+\frac{1}{t}\right)$, så

$$\text{Längden av kurvan } = \int_1^2|\mathbf{r}'(t)|\mathrm{d}t=2\int_1^2\left(t+\frac{1}{t}\right)\mathrm{d}t=3+2\log(2).$$

Till följande uppgift skall fullständig lösning redovisas på separat skrivpapper. Motivera och förklara så väl du kan.

2. Låt $f(x,y)=\frac{2x}{x^2+y^4+1}$.

(a) Förklara varför funktionen f måste ha både ett globalt maximum och minimum i hela $\mathbb{R}^2$. (2p)

(b) Bestäm dessa globala extremvärden. (3p)

(c) Bestäm dess globala extremvärden i den kompakta domänen (1p)

$$\Omega := \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^4\leq 1/4\}.$$

Lösning: a) Eftersom det är ett högre ordningens polynom i nämnaren än i täljaren i $f(x,y) = \frac{2x}{x^2+y^4+1}$ gäller det att $f(x,y) \to 0$ då $|x|+|y| \to \infty$. För en funktion sådan att $f(x,y) \to 0$ då $|x|+|y| \to \infty$ och uppfyller $f(x,y) > 0$ i någon punkt, så har f ett största värde. På samma sätt, om $f(x,y) \to 0$ då $|x|+|y| \to \infty$ och uppfyller $f(x,y) < 0$ i någon punkt, så har f ett minsta värde. Se mer i Exempel 8 i kapitel 13.1 i Adams. Eftersom $f(-1,0) = -1 < 0$ och $f(1,0) = 1 > 0$ har f både ett största och minsta värde.

Här följer ett mer grundligt argument för en lösning till a). Vi observerar att $f(x,y) \to 0$ då $|x|+|y| \to \infty$ eftersom

$$|f(x,y)| = \frac{2|x|}{x^2+y^4+1} \leq \frac{2\sqrt{x^2+y^4+1}}{x^2+y^4+1} = \frac{2}{\sqrt{x^2+y^4+1}} \to 0.$$

Det följer att för varje $\epsilon > 0$ finns ett $R > 0$ sådan att $|f(x,y)| < \epsilon$ om $(x,y) \notin \overline{B_R(0)}$. Notera att f antar både positiva och negativa värden. Låt $a < 0$ vara ett negative värde av f och $b > 0$ ett positivt värde av f. Tag $\epsilon < \min(-a, b)$ och R är som ovan. Vi kan anta att a är minimum av f i $\overline{B_R(0)}$ och b maximum av f i $\overline{B_R(0)}$ (varje kontinuerlig funktion antar max/min på kompakter). Då gäller att $f \leq b$ och f antar värdet b så b är ett globalt maximum. På samma sätt är $f \geq a$ och antar värdet a, så a är ett globalt minimum.

b) Om vi tar R stort nog ser vi att maximum/minimum av f måste vara en inre punkt i $B_R(0)$ så maximum och minimum svarar mot kritiska punkter. Vi räknar ut att

$$\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{2}{x^2+y^4+1} - \frac{4x^2}{(x^2+y^4+1)^2} \\ \frac{-8y^3x}{(x^2+y^4+1)^2} \end{pmatrix} = \frac{2}{x^2+y^4+1} \begin{pmatrix} 1 - x^2 + y^2 \\ 4y^3x \end{pmatrix}$$

Därmed bestäms de kritiska punkterna av de två ekvationerna $1 + y^2 = x^2$ och $y^3x = 0$. Lösningarna är givna av $(\pm 1, 0)$ där funktionen antar värdena $f(1,0) = 1$ respektive $f(-1,0) = -1$; detta är maximum respektive minimum i $\mathbb{R}^2$.

c) En differentierbar funktion på en kompakt domän antar sitt maximum och minimum i en kritisk punkt i det inre eller på randen. Enligt b) har f inga kritiska punkter i Ω. Vi kan parametrisera randen av Ω enligt $\mathbf{r}(t) = (t, \pm\sqrt[4]{1/4 - t^2})$ (för $t \in [-1/2, 1/2]$) och då $f(x,y) = f(x,-y)$ är resultatet oberoende av vilken parametrisering vi väljer. Vi söker alltså maximum och minimum av $g(t) = f(\mathbf{r}(t)) = 8t/5$ där $t \in [-1/2, 1/2]$. Maximum och minimum för denna funktionen antas i $t = -1/2$ respektive $t = 1/2$. Det vill säga minimum av f på Ω antas i $(-1/2, 0)$ och är $-4/5$ och maximum av f på Ω antas i $(1/2, 0)$ och är $4/5$.