

Tentamen

TMA044 Flervariabelanalys E2

2016-10-27 kl. 8.30–12.30

Examinator: Magnus Goffeng , Matematiska vetenskaper, Chalmers

Telefonvakt: Håkon Strand Bölviken, telefon: 5325

Hjälpmedel: bifogat formelblad, ej räknedosa

För godkänt på tentan krävs antingen 25 poäng på godkäntdelens två delar sammanlagt, eller att båda delarna är godkända var för sig. För godkänt på del 1 krävs minst 10 poäng, för godkänt på del 2 krävs 13 poäng. Erhållen poäng på någon av delarna får ersätta poäng på motsvarande del på senare tentamen tills kursen ges nästa läsår. För att få slutbetyg på kursen skall också Matlabmomentet vara godkänt. För betyg 4 eller 5 krävs dessutom 33 resp. 42 poäng sammanlagt på tentamens alla delar.

Lösningar läggs ut på kursens webbsida första vardagen efter tentamensdagen. Tentan rättas och bedöms anonymt. Resultat meddelas via Ladok ca. tre veckor efter tentamenstillfället. Första granskningstillfälle meddelas på kurswebbsidan, efter detta sker granskning alla vardagar 9-13, MV:s exp.

Överbetygsdelen

Endast om man ligger enstaka poäng från godkänt och presterat riktigt bra på någon av följande uppgifter kan poäng på denna del räknas in för att nå godkäntgränsen. Normalt krävs för poäng på uppgift att man redovisat en fullständig lösningsgång, som i princip lett, eller åtminstone skulle kunnat leda, till målet.

6. Låt $D \subseteq \mathbb{R}^2$ vara en domän och $\vec{F} : D \rightarrow \mathbb{R}^2$ ett glatt vektorfält.

(a) Antag att $\vec{F}$ är virvelfritt. Visa att om $\mathcal{C}_1$ och $\mathcal{C}_2$ är två enkla slutna styckvis glatta kurvor i D , med $\mathcal{C}_1 \cup -\mathcal{C}_2 = \partial\mathcal{R}$ för någon domän $\mathcal{R} \subseteq D$ med styckvis glatt rand, så är $\oint_{\mathcal{C}_1} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \oint_{\mathcal{C}_2} \vec{F} \cdot d\vec{r}$. (2p)

(b) Låt $D = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ och $\vec{F}(x, y) = \left(\frac{-y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2} \right)$. Visa att $\vec{F}$ är virvelfritt och räkna ut $\oint_{\mathcal{C}} \vec{F} \cdot d\vec{r}$ för en enkel sluten kurva $\mathcal{C}$ som går ett varv moturs runt $0 \in \mathbb{R}^2$. (4p)

Lösning a): Om $\vec{F}$ är virvelfritt, så är

$$0 = \iint_{\mathcal{R}} \left(\frac{\partial F^2}{\partial x} - \frac{\partial F^1}{\partial y} \right) dA = \oint_{\partial\mathcal{R}} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \oint_{\mathcal{C}_1} \vec{F} \cdot d\vec{r} - \oint_{\mathcal{C}_2} \vec{F} \cdot d\vec{r}.$$

Lösning b): Vi räknar ut at

$$\frac{\partial F^2}{\partial x} = \frac{1}{x^2 + y^2} - \frac{2x^2}{(x^2 + y^2)^2}$$

$$\frac{\partial F^1}{\partial y} = \frac{-1}{x^2 + y^2} + \frac{2y^2}{(x^2 + y^2)^2}$$

Därmed är

$$\frac{\partial F^2}{\partial x} - \frac{\partial F^1}{\partial y} = \frac{2}{x^2 + y^2} - \frac{2x^2 + 2y^2}{(x^2 + y^2)^2} = 0,$$

och $\vec{F}$ är virvelfritt.

Om vi använder a), så för att räkna ut $\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$ för en enkel sluten kurva C som går ett varv runt $0 \in \mathbb{R}^2$ räcker det att räkna ut integralen för cirkeln $S^1 = \{(x, y) : x^2 + y^2 = 1\}$ orienterad moturs. På vårt val av kurva är $\vec{F} = (-y, x)$ och Greens formel ger att

$$\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{S^1} (-y, x) \cdot d\vec{r} = \iint_{x^2 + y^2 \leq 1} 2dA = 2\pi.$$

7. (a) Bevisa Gauß sats för en z -enkel domän och ett fält på formen $\vec{F} = (0, 0, f)$ för en funktion f . (3p)

- (b) Beräkna flödet av $\vec{F} = \frac{(x, y, z)}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}$ uppåt genom delen av enhetssfären $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ där $z \geq 1/2$. (4p)

Lösning a): Se Adams Sats 16.4.8.

Lösning b): Vi ämnar använda Gauß sats. Först räknar vi ut divergensen.

$$\frac{\partial F^1}{\partial x} = \frac{1}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} - \frac{3}{2} \frac{2x^2}{(x^2 + y^2 + z^2)^{5/2}} = \frac{1}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} - \frac{3x^2}{(x^2 + y^2 + z^2)^{5/2}},$$

$$\frac{\partial F^2}{\partial y} = \frac{1}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} - \frac{3y^2}{(x^2 + y^2 + z^2)^{5/2}},$$

$$\frac{\partial F^3}{\partial z} = \frac{1}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} - \frac{3z^2}{(x^2 + y^2 + z^2)^{5/2}}.$$

Därmed är

$$\operatorname{div}(\vec{F}) = \frac{3}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} - \frac{3(x^2 + y^2 + z^2)}{(x^2 + y^2 + z^2)^{5/2}} = 0.$$

Vi låter S beteckna ytan som ges av delen av enhetssfären där $z \geq 1/2$ och S_0 delen av planet $z = 1/2$ där $x^2 + y^2 \leq 3/4$. Då är

$$S \cup S_0 = \partial D, \quad \text{där } D = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 \leq 1, z \geq 1/2\}.$$

Låt $\hat{N}$ beteckna den utåtriktade normalen på ∂D . Enligt Gauß divergens sats är

$$\begin{aligned} \iint_S \vec{F} \cdot \hat{N} dS &= \iint_{\partial D} \vec{F} \cdot \hat{N} dS - \iint_{S_0} \vec{F} \cdot \hat{N} dS \\ &= \iiint_D \operatorname{div}(\vec{F}) dV - \iint_{S_0} \vec{F} \cdot \hat{N} dS = - \iint_{S_0} \vec{F} \cdot \hat{N} dS. \end{aligned}$$

På S_0 är $\hat{N} = -\mathbf{k}$ så

$$\begin{aligned} - \iint_{S_0} \vec{F} \cdot \hat{N} dS &= \iint_{x^2+y^2 \leq 3/4} \frac{z}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} dx dy = \\ &= \frac{1}{2} \iint_{x^2+y^2 \leq 3/4} \frac{1}{(x^2+y^2+1/4)^{3/2}} dx dy = \pi \int_0^{\sqrt{3}/2} \frac{r}{(r^2+1/4)^{3/2}} dr = \\ &= \pi \left[-(r^2+1/4)^{-1/2} \right]_{r=0}^{\sqrt{3}/2} = \pi \end{aligned}$$

8. Låt $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ och $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ vara funktioner.

(a) Definiera vad det betyder att i) f har partiella derivator i en punkt (a, b) och ii) f är differentierbar i (a, b) . (1p)

(b) Formulera och bevisa kedjeregeln för $f \circ g$ om f och g är differentierbara. (4p)

Lösning a): Se Adams Definition 12.3.4 respektive 12.6.5.

Lösning b): Se Adams Sats 12.6.5.

Godkänddelen, del 1

1. Till nedanstående uppgifter skall korta lösningar redovisas, samt svar anges, på anvisad plats. Endast lösningar och svar på detta blad, och på anvisad plats, beaktas.

(a) i) Ange om mängden $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : y > 0, z = 0\}$ är
A Öppen
B Ej öppen (0.5p)

Svar: **B** är riktigt eftersom mängden inte är öppen (den är inte heller sluten då den inte innehåller alla sina randpunkter (exempelvis $(0, 0, 0)$)).

ii) Om $f(x, y) = 0$ definierar en glatt kurva i $\mathbb{R}^2$ som innehåller punkten (a, b) är det då **sant** eller **falskt** att $\nabla f(a, b) = \begin{pmatrix} f_1(a, b) \\ f_2(a, b) \end{pmatrix}$ är en normal till kurvan i (a, b) och $\begin{pmatrix} f_2(a, b) \\ -f_1(a, b) \end{pmatrix}$ är en tangentvektor till kurvan i (a, b) . (0.5p)

Svar: Det är ett sant påstående.

iii) Låt $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ vara en glatt funktion. Vilket av följande påståenden är sanna?
A Jacobianen till gradienten i en punkt (a, b) är Hessianen i punkten (a, b) .
B Gradienten till f är en flervariabel-analog till andra-derivatan av en funktion.
C Jacobianen är en flervariabel-analog till andra-derivatan av f . (0.5p)

Svar: **A** är det sanna påståendet.

- (b) Låt $G(x, y, z) := e^x \sin(y + z) + 3y^2$. Bestäm tangentplanet till ytan i $\mathbb{R}^3$ definierad av ekvationen $G(x, y, z) = 3$ i punkten $(0, 1, -1)$. (2p)

Lösning: Vi räknar ut

$$\nabla G = \begin{pmatrix} e^x \sin(y + z) \\ e^x \cos(y + z) + 6y \\ e^x \cos(y + z) \end{pmatrix}.$$

Så normalen till ytan $G(x, y, z) = 3$ i punkten $(0, 1, -1)$ ges av

$$\vec{n} = \nabla G(0, 1, -1) = \begin{pmatrix} e^0 \sin(1 - 1) \\ e^0 \cos(1 - 1) + 6 \\ e^0 \cos(1 - 1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 7 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Tangentplanets ekvation tar formen $\vec{n} \cdot (x - 0, y - 1, z - (-1)) = 0$ vilket skrivs som $7(y - 1) + z + 1 = 0$, eller $7y + z = 6$.

- (c) Låt $\mathcal{C} \subseteq \mathbb{R}^3$ vara kurvan parametriserad av $\vec{r}(t) = (\cos(t^2), \sin(t^2), t - \frac{t^3}{3})$, $t \in [0, 1]$.

i. Skissa kurvan $\mathcal{C}$. (1p)

Skiss: För att skissa kurvan använder man att i planet ger kurvan $(\cos(t^2), \sin(t^2))$ ett cirkelsegment och $t - \frac{t^3}{3} \approx t$ nära $t = 0$ så det ser ut som en helix.

ii. Bestäm längden av $\mathcal{C}$. (2p)

Lösning: Vi räknar ut hastigheten $\frac{d\vec{r}}{dt}(t) = (-2t \sin(t^2), 2t \cos(t^2), 1 - t^2)$. Farten ges av

$$\begin{aligned} \left| \frac{d\vec{r}}{dt}(t) \right| &= \sqrt{(-2t \sin(t^2))^2 + (2t \cos(t^2))^2 + (1 - t^2)^2} = \\ &= \sqrt{4t^2 + (1 - t^2)^2} = \sqrt{(1 + t^2)^2} = 1 + t^2. \end{aligned}$$

Vi får ut längden av kurvan:

$$\text{längden}(\mathcal{C}) = \int_0^1 \left| \frac{d\vec{r}}{dt}(t) \right| dt = \int_0^1 (1 + t^2) dt = \left[t + \frac{t^3}{3} \right]_{t=0}^1 = \frac{4}{3}.$$

- (d) Taylorutveckla funktionen $\ln(x^2 + y)$ till ordning 2 kring punkten $(0, 1)$ och använd till att räkna ut $\ln(1.0104)$. (2.5p)

Lösning: Vi har att $\ln(1 + t) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{t^k}{k}$ så

$$\begin{aligned} \ln(x^2 + y) &= \ln(1 + (x^2 + y - 1)) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{(x^2 + y - 1)^k}{k} = \\ &= x^2 + y - 1 - \frac{1}{2}(x^2 + y - 1)^2 + \dots = x^2 + y - 1 - \frac{1}{2}(y - 1)^2 + \dots \end{aligned}$$

Därmed är Taylorpolynomet av grad 2 kring $(0, 1)$ på formen $x^2 + y - 1 - \frac{1}{2}(y - 1)^2$.

Vi approximerar

$$\ln(1.0104) = \ln((0.02)^2 + 1.01) \approx (0.02)^2 + 0.01 - \frac{1}{2}(0.01)^2 = 0.0004 + 0.01 - 0.00005 = 0.01035.$$

Anmärkning: En längre decimalutveckling ges av:

$$0.0103462920541443011636920109566960519911270683630862$$

2. Låt $f(x, y) = x^3 - y^3 + 3xy$.

(a) Finn och karakterisera de kritiska punkterna till f . (3p)

(b) Finn maximum och minimum av f på den kompakta domänen som ges av triangeln med hörn i $(0, 0)$, $(1, 0)$ och $(1, 1)$. (2p)

Lösning a): Vi beräknar först gradienten:

$$\nabla f(x, y) = \begin{pmatrix} 3x^2 + 3y \\ -3y^2 + 3x \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} x^2 + y \\ x - y^2 \end{pmatrix}.$$

De kritiska punkterna ges där $x^2 = -y$ och $x = y^2$, dvs när $y^4 + y = 0$ och $x = y^2$. De enda lösningarna till dessa ekvationerna är $(0, 0)$ och $(1, -1)$.

För att karakterisera de kritiska punkterna räknar vi ut Hessianen

$$H_f(x, y) = \begin{pmatrix} 6x & 3 \\ 3 & -6y \end{pmatrix}.$$

Vi har att

$$H_f(0, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Då $\det(H_f(0, 0)) = 0 - 9 = -9 < 0$ är $(0, 0)$ en sadelpunkt.

Vi har att

$$H_f(1, -1) = \begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}.$$

Då $\det(H_f(1, -1)) = 36 - 9 = 27 > 0$ och $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1, -1) = 6 > 0$ antar f ett lokalt minimum i $(1, -1)$.

Lösning b): Kalla domänen i uppgiften D . Detta är en domän som begränsas av linjerna $x = 1$, $y = 0$ och $y = x$. Enligt a har f inga kritiska punkter i domänen. Så vi letar extremvärden på randen.

Där $x = 1$ löper y mellan 0 och 1, så vi optimerar $g_1(y) = f(1, y) = 1 - y^3 + 3y$ på intervallet $[0, 1]$. Då $g_1'(y) = 3(-y^2 + 1) > 0$ för $y \in (0, 1)$ antas dess extremvärden på randen och maximum är 3 och dess minimum är 1.

Där $y = 0$ löper x mellan 0 och 1, så vi optimerar $g_2(x) = f(x, 0) = x^3$ på intervallet $[0, 1]$. Dess maximum är 1 och dess minimum är 0.

Där $y = x$ löper $x = y$ mellan 0 och 1, så vi optimerar $g_3(x) = f(x, x) = 3x^2$ på intervallet $[0, 1]$. Dess maximum är 3 och dess minimum är 0.

Därmed är maximum av f på D givet av $f(1, 1) = 3$ och minimum $f(0, 0) = 0$.

Godkäntdelen, del 2

3. Till nedanstående uppgifter skall korta lösningar redovisas, samt svar anges, på anvisad plats. Endast lösningar och svar på detta blad, och på anvisad plats, beaktas.

- (a) i) Vilket av följande påståenden är falskt för en dubbelintegral av en kontinuerlig funktion $f(x, y) > 0$ över en domän D ?
- A Resultatet av integralen är en vektor i xy -planet.
 - B Integralen är ett tal som representerar volymen av soliden under grafen $z = f(x, y)$.
 - C Om $f = 1$ beräknar integralen arean av domänen D .
 - D Om domänen D är en rektangel i $\mathbb{R}^2$ beskriven av ett fixt intervall längs x -axeln och ett fixt intervall längs y -axeln så spelar det ingen roll i vilken ordning vi integrerar över x och y .
- (0.5p)

Svar: A är falskt.

- ii) Är det sant att om $\vec{F} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ är ett glatt vektorfält, så är vektorn $\vec{F}(x, y)$ vinkelrät mot sina fältlinjer som går genom (x, y) ?
- (0.5p)

Svar: Nej. Per definition går fältet tangentiellt till fältlinjerna.

- iii) Är det sant att flödet av ett glatt fält $\vec{F} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, som är källfritt på hela $\mathbb{R}^3$, genom randen av en domän $D \subseteq \mathbb{R}^3$ (med styckvis glatt rand) är noll?
- (0.5p)

Svar: Ja. Gauß sats ger att flödet av ett fält genom randen av en domän är trippelintegralen av divergensen över domänen, är fältet källfritt är trippelintegralen 0.

- (b) i. Definiera när ett glatt fält $\vec{F} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ är konservativt.
- (0.5p)

Svar: $\vec{F}$ är konservativt om det finns en potential ϕ sådan att $\vec{F} = \nabla\phi$.

- ii. Bestäm en potential till vektorfältet $\vec{F}(x, y, z) = (x, z, y)$.
- (2p)

Lösning: Vi gör ansatsen att $\vec{F} = \nabla\phi$. Då $\frac{\partial\phi}{\partial x} = x$ så är $\phi(x, y, z) = \frac{x^2}{2} + C(y, z)$ för en funktion C . Då $\frac{\partial\phi}{\partial y} = z$ är $\phi(x, y, z) = \frac{x^2}{2} + yz + D(z)$ för en funktion D . Då $\frac{\partial\phi}{\partial z} = y$ måste D vara en konstant. Så $\phi(x, y, z) = \frac{x^2}{2} + yz + D$ för en konstant D .

- (c) Beräkna massan av kroppen omsluten av konen $z^2 = x^2 + y^2$ med densitet (3p)

$$\rho(x, y, z) = \frac{e^{-(x^2+y^2+z^2)}}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}.$$

Lösning: Låt K beteckna kroppen. I sfäriska koordinater ges kroppen av $\phi \in [0, \pi/4] \cup [3\pi/4, \pi]$. Då massan för $z \geq 0$ är samma som för $z \leq 0$ ges massan av integralen

$$\begin{aligned} \iiint_K \rho(x, y, z) dV &= \iiint_{x^2+y^2 < z^2} \frac{e^{-(x^2+y^2+z^2)}}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} dx dy dz = \\ &= 2 \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{\phi=0}^{\pi/4} \int_{R=0}^{\infty} \frac{e^{-R^2}}{R} R^2 \sin(\phi) dR d\phi d\theta = \\ &= 4\pi \left[-\frac{e^{-R^2}}{2} \right]_{R=0}^{\infty} [-\cos(\phi)]_{\phi=0}^{\pi/4} = 4\pi \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}} \right). \end{aligned}$$

- (d) Bestäm masscentrumet (tyngdpunkten) av kroppen med konstant densitet som bestäms av olikheterna $-1 \leq x \leq 1$, $-1 \leq y \leq 1$ och $0 \leq z \leq \sqrt{2-x-y}$. Du får använda att volymen av denna kroppen är $V = 16(8 - \sqrt{2})/15$. (2p)

Lösning: Beteckna masscentret med $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ och kroppen med K . Eftersom kroppen är symmetrisk i x -led och y -led är $\bar{x} = \bar{y} = 0$. Vi räknar ut att

$$\begin{aligned} \bar{z} &= \frac{1}{V} \iiint_K z dV = \frac{1}{V} \int_{x=-1}^1 \int_{y=-1}^1 \int_{z=0}^{\sqrt{2-x-y}} z dz dy dx = \\ &= \frac{1}{V} \int_{x=-1}^1 \int_{y=-1}^1 \left[\frac{z^2}{2} \right]_{z=0}^{\sqrt{2-x-y}} dy dx = \\ &= \frac{1}{2V} \int_{x=-1}^1 \int_{y=-1}^1 (2-x-y) dy dx = \frac{4}{V} = \frac{15}{4(8-\sqrt{2})}. \end{aligned}$$

I sista steget använde vi symmetrierna i x - och y -led för att sluta oss till att $\bar{x} = \bar{y}$. Vi räknar ut att

$$\begin{aligned} \bar{x} &= \frac{1}{V} \iiint_K x dV = \frac{1}{V} \int_{x=-1}^1 \int_{y=-1}^1 \int_{z=0}^{\sqrt{2-x-y}} x dz dy dx = \\ &= \frac{1}{V} \int_{x=-1}^1 \int_{y=-1}^1 x \sqrt{2-x-y} dy dx = \\ &= \frac{2}{3V} \int_{x=-1}^1 (x(3-x)^{3/2} - x(1-x)^{3/2}) dx. \end{aligned}$$

Vi gör räkningen $\int_{x=-1}^1 x(a-x)^{3/2} dx = \left[-\frac{2}{5}x(a-x)^{5/2} \right]_{x=-1}^1 + \int_{-1}^1 \frac{2}{5}(a-x)^{5/2} dx = -\frac{2}{5}(a-1)^{5/2} - \frac{2}{5}(a+1)^{5/2} + \frac{4}{35}(a+1)^{7/2} - \frac{4}{35}(a-1)^{7/2}$ och får att

$$\begin{aligned} \bar{x} &= \frac{2}{3V} \left(-\frac{2}{5}2^{5/2} - \frac{2}{5}4^{5/2} + \frac{4}{35}4^{7/2} - \frac{4}{35}2^{7/2} + \frac{2}{5}2^{5/2} - \frac{4}{35}2^{7/2} \right) = \\ &= \frac{2}{3V} \left(-\frac{2}{5}2^5 + \frac{4}{35}2^7 - \frac{8}{35}2^{7/2} \right) = \frac{-2^3 + \frac{1}{7}2^6 - \frac{1}{7}2^{7/2}}{8 - \sqrt{2}} \\ &= \frac{-8 + \frac{1}{7}64 - \frac{1}{7}8\sqrt{2}}{8 - \sqrt{2}} = \frac{8 - 8\sqrt{2}}{7(8 - \sqrt{2})}. \end{aligned}$$

4. Låt $\mathcal{C}$ vara den moturs orienterade enhetscirkeln $x^2 + y^2 = 1$ i planet.

(a) Beräkna $\oint_{\mathcal{C}} (e^x - y)dx + (\sin(y) + x)dy$ genom att använda Greens sats. (1.5p)

(b) Beräkna $\oint_{\mathcal{C}} (e^x - y)dx + (\sin(y) + x)dy$ genom att parametrisera $\mathcal{C}$. (2.5p)

Lösning a): Den moturs orienterade enhetscirkeln är randen till enhetsdisken $D = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 1\}$ i planet. Greens sats ger därför

$$\begin{aligned}\oint_{\mathcal{C}} (e^x - y)dx + (\sin(y) + x)dy &= \iint_D \left(\frac{\partial(\sin(y) + x)}{\partial x} - \frac{\partial(e^x - y)}{\partial y} \right) dA = \\ &= 2 \iint_D dA = 2\pi.\end{aligned}$$

Lösning b): Vi parametriserar cirkeln genom $x(t) = \cos(t)$ och $y(t) = \sin(t)$ för $t \in [0, 2\pi]$. Vi har att

$$\begin{aligned}\oint_{\mathcal{C}} (e^x - y)dx + (\sin(y) + x)dy &= \int_0^{2\pi} \left((e^x - y) \frac{dx}{dt} + (\sin(y) + x) \frac{dy}{dt} \right) dt \\ &= \int_0^{2\pi} e^x \frac{dx}{dt} dt + \int_0^{2\pi} \left(-y \frac{dx}{dt} + x \frac{dy}{dt} \right) dt + \int_0^{2\pi} \sin(y) \frac{dy}{dt} dt =\end{aligned}$$

I den första integralen byter vi variabler till x och i den tredje till y och

$$\begin{aligned}&= \int_1^1 e^x dx + \int_0^{2\pi} \left(-y \frac{dx}{dt} + x \frac{dy}{dt} \right) dt + \int_0^0 \sin(y) dy = \\ &= \int_0^{2\pi} \left(-y \frac{dx}{dt} + x \frac{dy}{dt} \right) dt = \\ &= \int_0^{2\pi} (\sin^2(t) + \cos^2(t)) dt = 2\pi.\end{aligned}$$

5. Låt $S \subseteq \mathbb{R}^3$ beteckna ytan som ges av $x^2 + y^2 = 3$ och $-1 \leq z \leq 1$. Vi orienterar ytan S genom sin normaliserade utåtriktade normal $\hat{N}$ (som pekar bort från 0). Vi betraktar fältet $\vec{F}(x, y, z) = (x + z, y, z^2 - 1)$.

(a) Skissa ytan S , bestäm dess normal $\hat{N}$ och skriv ner ytelementet dS på S i cylindriska koordinater. (1.5p)

(b) Räkna ut $\iint_S \vec{F} \cdot \hat{N} dS$. Du kan exempelvis använda cylindriska koordinater. (2.5p)

(c) Varför kan du inte använda Gauß sats *direkt* här? Hur skulle du kunna gå tillväga för att komma runt problemet? (1p)

Lösning a): Ytan S är delen av cylindern av radie $\sqrt{3}$ med z mellan -1 och 1 . Ytelementet på $x^2 + y^2 = r^2$ i cylindriska koordinater ges av $dS = r d\theta dz$, så ytelementet på S ges av

$$dS = \sqrt{3} d\theta dz.$$

Normalen till en implicit definierad yta $G(x, y, z) = k$ ges av gradienten av G , så en normal till S i punkten (x, y, z) ges av $(x, y, 0) = (\sqrt{3} \cos(\theta), \sqrt{3} \sin(\theta), 0)$. Denna normalen är utåtriktad. Dess längd ges av $\sqrt{x^2 + y^2}$ vilken är $\sqrt{3}$ på S , så en normaliserad utåtriktad normal i punkten $(x, y, z) = (\sqrt{3} \cos(\theta), \sqrt{3} \sin(\theta), z)$ på S ges av

$$\hat{N} = \frac{1}{\sqrt{3}}(x, y, 0) = (\cos(\theta), \sin(\theta), 0).$$

Lösning b): Vi räknar ut att i cylindriska koordinater är

$$\vec{F}(x, y, z) = (\sqrt{3} \cos(\theta) + z, \sqrt{3} \sin(\theta), z^2 - 1).$$

Därmed är

$$\vec{F}(x, y, z) \cdot \hat{N} = \sqrt{3} \cos^2(\theta) + z \cos(\theta) + \sqrt{3} \sin^2(\theta) = \sqrt{3} + z \cos(\theta).$$

Ytan är enligt a) given av $r = \sqrt{3}$ och $-1 \leq z \leq 1$ i cylindriska koordinater. Vi räknar ut flödet

$$\begin{aligned} \iint_S \vec{F} \cdot \hat{N} dS &= \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{z=-1}^1 (\sqrt{3} + z \cos(\theta)) \sqrt{3} d\theta dz = \\ &= 3 \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{z=-1}^1 d\theta dz = 12\pi. \end{aligned}$$

I första steget använde vi att z integrerar till 0 över ett symmetriskt intervall i z -led.

Lösning c): Vi kan inte använda Gauß direkt på S eftersom ytan S inte är sluten. Vad man kan göra är att sätta lock på cylindern, dvs. lägga till delen av planen $z = 1$ och $z = -1$ där $x^2 + y^2 \leq 3$. Kalla dessa nya ytorna S_{+1} och S_{-1} och kroppen som ytan $S \cup S_{-1} \cup S_{+1}$ begränsar för $D = \{(x, y, z), x^2 + y^2 \leq 3, -1 \leq z \leq 1\}$.

Kommentar på c): Om man gjort ovanstående, skulle räkningen i b) förenklas som följer. På S_{+1} och S_{-1} är den utåtriktade normalen (som ges av $\pm \mathbf{k}$) vinkelrät mot fältet $\vec{F}$ så $\iint_{S_{-1} \cup S_{+1}} \vec{F} \cdot \hat{N} dS = 0$. Gauß sats och resonemangen ovan ger att

$$\begin{aligned} \iint_S \vec{F} \cdot \hat{N} dS &= \iint_{S \cup S_{-1} \cup S_{+1}} \vec{F} \cdot \hat{N} dS = \iint_{\partial D} \vec{F} \cdot \hat{N} dS = \\ &= \iiint_D \operatorname{div}(\vec{F}) dV = \iiint_D (2 + 2z) dV = 2 \operatorname{vol}(D) = 12\pi. \end{aligned}$$