Tentamen
TMA044 Flervariabelanalys E2

2016-12-20 kl. 8.30–12.30

Examinator: Magnus Goffeng, Matematiska vetenskaper, Chalmers

Telefonvakt: Olof Giselsson, telefon: 5325

Hjälpmedel: bifogat formelblad, ej räknedosa

För godkänt på tentan krävs antingen 25 poäng på godkäntdelens två delar sammanlagt, eller att båda delarna är godkända var för sig. För godkänt på del 1 krävs minst 10 poäng, för godkänt på del 2 krävs 13 poäng. Erhållen poäng på någon av delarna får ersätta poäng på motsvarande del på senare tentamen tills kursen ges nästa läsår. För att få slutbetyg på kursen skall också Matlabmomentet vara godkänt. För betyg 4 eller 5 krävs dessutom 33 resp. 42 poäng sammanlagt på tentamens alla delar.

Lösningar läggs ut på kursens webbsida första vardagen efter tentamensdagen. Tentan rättas och bedöms anonymt. Resultat meddelas via Ladok ca. tre veckor efter tentamenstillfället. Första granskningstillfälle meddelas på kurswebbsidan, efter detta sker granskning alla vardagar 9-13, MV:s exp.

Godkäntdelen, del 1

Se uppgift 1 och 2 på sida 3-4

Godkäntdelen, del 2

Uppgift 3, 4 och 5 se sidor 5-7

Överbetygsdelen

Endast om man ligger enstaka poäng från godkänt och presterat riktigt bra på någon av följande uppgifter kan poäng på denna del räknas in för att nå godkäntgränsen. Normalt krävs för poäng på uppgift att man redovisat en fullständig lösningsgång, som i princip lett, eller åtminstone skulle kunnat leda, till målet.

6. (a) Visa att $f(x,y) = x^2(x^2+y^2)^{-1}$ ej har en kontinuerlig utvidgning i origo. (2p)

(b) Avgör om $f(x,y) = x^3(x^2+y^2)^{-1}$ är kontinuerlig för alla (x,y). (4p)

Lösning a): Det räcker att avgöra om $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ existerar. Om vi går längs kurvan $y = kx$ har vi att

$$f(x,kx) = \frac{1}{1+k^2}.$$

Då $f(x,kx) = \frac{1}{1+k^2}$ existerar gränsvärdet ej i origo.

Lösning b): Funktionen f är kontinuerlig för $(x,y) \neq (0,0)$. Vidare är

$$|f(x,y)| = |x|\frac{x^2}{x^2+y^2} \leq |x|\frac{x^2+y^2}{x^2+y^2} = |x|.$$

Därmed gäller att $x^3(x^2+y^2)^{-1} \to 0$ då $(x,y) \to (0,0)$ och f är kontinuerlig även i origo.

7. (a) Formulera Stokes sats. Glöm inte att skriva upp alla nödvändiga villkor. (1p)

(b) Låt $\mathcal{C}$ vara kurvan i $\mathbb{R}^3$ parametriserad av $\vec{r}(t) = (2\cos(t), 2\sin(t), 2 - \cos(t) - \sin(t))$, $t \in [0, 2\pi]$. Betrakta fältet

$$\vec{F}(x,y,z) = \begin{pmatrix} x^2 \\ y \\ y \end{pmatrix}.$$

Beräkna arbetsintegralen $\oint_{\mathcal{C}} \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{r}$. (5p)

Lösning a): Om S är en styckvis glatt orienterad yta i $\mathbb{R}^3$ med glatt rand $\mathcal{C}$ och $\vec{F} : S \to \mathbb{R}^3$ är ett glatt fält så gäller att

$$\oint_{\mathcal{C}} \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{r} = \iint_S \nabla \times \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{S}.$$

Lösning b): Kurvan $\mathcal{C}$ är en ellips i planet $x + y + 2z = 4$. Vi kan beskriva $\mathcal{C}$ som randen av ytan S definerad av $x + y + 2z = 4$ för $x^2 + y^2 \leq 4$. Så vi kan använda Stokes sats. Skriv

$$\vec{F} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ y \end{pmatrix}}_{\vec{F}_1} + \underbrace{\begin{pmatrix} x^2 \\ y \\ 0 \end{pmatrix}}_{\vec{F}_2}.$$

Vi har att $\vec{F}_2 = \nabla\phi$ där $\phi(x,y,z) = \frac{x^3}{3} + \frac{y^2}{2}$ så

$$\nabla \times \vec{F} = \nabla \times \vec{F}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Orienteringen på $\mathcal{C}$ som ges av parametrisering är moturs (sett ovanifrån), så den korrekta orienteringen på S är den uppåt pekande normalen. Ytan S parametriseras som grafen till $f(x,y) = 2 - \frac{x+y}{2}$ så med hänsyn till denna orienteringen är

$$\mathrm{d}\vec{S} = \begin{pmatrix} -\frac{\partial f}{\partial x} \\ -\frac{\partial f}{\partial y} \\ 1 \end{pmatrix} \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix} \mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

Vi sluter oss till att $\nabla \times \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = \frac{1}{2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ och att

$$\oint_{\mathcal{C}} \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{r} = \iint_S \nabla \times \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = 2\pi,$$

om vi använder att arean av disken $x^2 + y^2 \leq 4$ är 4π.

8. Beskriv fältlinjerna till $\vec{F}(x, y, z) = (y, x, y^3)$. (6p)

Lösning: Vi söker lösningarna till

$$\frac{\mathrm{d}x}{y} = \frac{\mathrm{d}y}{x} = \frac{\mathrm{d}z}{y^3}.$$

Likheten $\frac{\mathrm{d}x}{y} = \frac{\mathrm{d}y}{x}$ ger $x\mathrm{d}x = y\mathrm{d}y$ så $x^2 = y^2 + C$ för någon konstant C. Insättning i ekvationen $\frac{\mathrm{d}x}{y} = \frac{\mathrm{d}z}{y^3}$ ger att $(x^2 - C)\mathrm{d}x = \mathrm{d}z$ så $z = \frac{x^3}{3} - Cx + D$ för någon konstant D. Fältlinjerna ges därför av ekvationerna $x^2 = y^2 + C$ och $z = \frac{x^3}{3} - Cx + D$ för konstanter C, D. Så fältlinjerna är snitten mellan grafen $z = \frac{x^3}{3} - Cx + D$ och hyperboloiden $x^2 = y^2 + C$. Dessa ritas genom att måla upp en komponent på hyperboloiden, exempelvis $x = \sqrt{y^2 + C}$ om $C > 0$, och längs den rita upp grafen $z = \frac{x^3}{3} - Cx + D$.

Godkäntdelen: del 1

1. Till nedanstående uppgifter skall korta lösningar redovisas, samt svar anges, på anvisad plats. Endast lösningar och svar på detta blad, och på anvisad plats, beaktas.

(a) i) Kan funktionen $f(x,y) = \frac{x^2-y^2}{x-y}$ ges en kontinuerlig utvidgning till hela $\mathbb{R}^2$?

A Ja

B Nej (0.5p)

Svar: A eftersom $f(x,y) = x + y$.

ii) Låt $f(x,y) = x^2 - y^3$. Vilket av följande uttryck ger Taylorutvecklingar av f till grad 2 i $(1,1)$?

A $P_2(1+h, 1+k) = 2h + 3k + h^2 - 3k^2$

B $P_2(1+h, 1+k) = 2(h-1) + 3(k-1) + (h-1)^2 - 3(k-1)^2$

C $P_2(1+h, 1+k) = 2(1+h) + 3(1+k) + (1+h)^2 - 3(1+k)^2$ (0.5p)

Svar: A eftersom $f(1+h, 1+k) = (1+h)^2 - (1+k)^3 = 1 + 2h + h^2 - (1 + 3k + 3k^2 + k^3) = 2h + h^2 - 3k - 3k^2 +$ högre ordningens termer.

iii) Låt $f : U \to \mathbb{R}$ vara en kontinuerlig funktion på en domän $U \subseteq \mathbb{R}^2$. Vilket av följande påståenden är sant?

A Om U är sluten finns ett globalt minimum till f.

B Om U är sluten och begränsad finns ett globalt minimum.

C Om U är begränsad så finns ett globalt maximum. (0.5p)

Svar: B, se Sats 13.1.2 i Adams. Exempelvis $U = \mathbb{R}^2$ ger lätt motexempel till **A** och U en öppen boll ger enkelt motexempel till **C**.

(b) Låt $G(x,y,z) := x^3y + 57z$. Bestäm tangentplanet till ytan i $\mathbb{R}^3$ definierad av ekvationen $G(x,y,z) = 0$ i punkten $(0,0,0)$. (2p)

Lösning: Vi har att $\nabla G(x,y,z) = (3x^2y, x^3, 57)^T$ så normalen till tangentplanet i $(0,0,0)$ ges av $\vec{n} = \nabla G(0,0,0) = (0,0,57)^T$. Normalplanets ekvation ges av $\vec{n} \cdot ((x,y,z) - (0,0,0)) = 0$, dvs $z = 0$.

(c) Låt $\mathcal{C} \subseteq \mathbb{R}^2$ vara kurvan parametriserad av $\vec{r}(t) = \left(\frac{2}{3}\mathrm{e}^{\frac{3}{2}t}, \mathrm{e}^t\right)$, $t \in [0,1]$.

i. Bestäm hastigheten i $t = 0$. (1p)

Lösning: Hastigheten i $t = 0$ ges av $\vec{r}\,'(0)$. Vi räknar ut att $\vec{r}\,'(t) = \left(\mathrm{e}^{\frac{3}{2}t}, \mathrm{e}^t\right)$ så $\vec{r}\,'(0) = (1,1)$.

ii. Bestäm längden av $\mathcal{C}$. (2p)

Lösning: Då $\vec{r}'(t) = \left(\mathrm{e}^{\frac{3}{2}t}, \mathrm{e}^t\right)$ så är $\mathrm{d}s = |\vec{r}'(t)|\,\mathrm{d}t = \sqrt{\mathrm{e}^{3t} + \mathrm{e}^{2t}}\,\mathrm{d}t = \mathrm{e}^t\sqrt{1+\mathrm{e}^t}\,\mathrm{d}t$.

Längden av $\mathcal{C}$ ges med hjälp av variabelbytet $u = \mathrm{e}^t$ av

$$\begin{aligned}
\text{längden}(\mathcal{C}) &= \int_{\mathcal{C}} \mathrm{d}s = \int_0^1 \mathrm{e}^t\sqrt{1+\mathrm{e}^t}\,\mathrm{d}t = \int_1^{\mathrm{e}} \sqrt{1+u}\,\mathrm{d}u \\
&= \left[\frac{2(1+u)^{3/2}}{3}\right]_{u=1}^{\mathrm{e}} = \frac{2((1+\mathrm{e})^{3/2} - 2^{3/2})}{3}.
\end{aligned}$$

(d) Låt $f = f(z,w)$ vara en två gånger differentierbar funktion. Räkna ut $\frac{\partial^2}{\partial x^2} f(z,w)$ där $z = x+y, w = x^3$. (3p)

Lösning: Om $z = z(x,y)$ och $w = w(x,y)$ så är

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial x} \quad \text{och} \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial y}.$$

Vi har att $z(x,y) = x+y$ och $w(x,y) = x^3$ så $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial y} = 1$, $\frac{\partial w}{\partial x} = 3x^2$ och $\frac{\partial w}{\partial y} = 0$. Därmed är

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial z} + \frac{\partial f}{\partial w}3x^2.$$

Enligt samma princip är

$$\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial w \partial z}3x^2 \quad \text{och} \quad \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial w}3x^2\right) = 6x\frac{\partial f}{\partial w} + \frac{\partial^2 f}{\partial w \partial z}3x^2 + 9x^4\frac{\partial^2 f}{\partial w^2}.$$

Därmed är

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} + 6x^2\frac{\partial^2 f}{\partial w \partial z} + 6x\frac{\partial f}{\partial w} + 9x^4\frac{\partial^2 f}{\partial w^2}.$$

Till följande uppgift skall fullständig lösning redovisas på separat skrivpapper. Motivera och förklara så väl du kan.

2. Betrakta funktionerna $f(x,y) = 2y + x$ och $g(x,y) = y^2 + xy - 1$.

(a) Använd Lagranges metod för att hitta extrempunkter till funktionen f under bivillkoret $g(x,y) = 0$. (3.5p)

(b) Taylorutveckla funktionen g runt punkten $(0,1)$. (1p)

Lösning a) Enligt Lagranges metod ges eventuella extrempunkterna till funktionen f under bivillkoret $g(x,y)=0$ som kritiska punkter till $F(x,y,\lambda)=f(x,y)-\lambda g(x,y)$. Vi har att $\nabla f(x,y)=(1,2)^T$ och $\nabla g(x,y)=(y,2y+x)^T$. Det vill säga, Lagranges metod ger att eventuella extrempunkter finns bland lösningarna till $\nabla F(x,y,\lambda)=0$, som är ekvivalent med ekvationssystemet

$$\begin{cases} 1-\lambda y=0 \\ 2-\lambda(2y+x)=0 \\ y^2+xy-1=0. \end{cases}$$

Vi löser nu ekvationssystemet. Eftersom $\lambda y=1$ är $y\neq 0$ och $\lambda=\frac{1}{y}$. Efter insättning i andra ekvationen får vi $2=\frac{2y+x}{y}$, det vill säga, $x=0$. Insättning i tredje ekvationen ger $y^2=1$ så $y=\pm 1$. De kritiska punkterna till F ges alltså av $(0,\pm 1)$.

Lösning b) Vi har att

$$\begin{aligned} g(x,y) &= y^2+xy-1=(y-1+1)^2+x(y-1+1)-1= \\ &= (y-1)^2+2(y-1)+1+x(y-1)+x-1=(y-1)^2+x(y-1)+2(y-1)+x. \end{aligned}$$

Anonym kod	TMA044 Flervariabelanalys E2 2016-12-20	sid.nummer	Poäng

Godkäntdelen: del 2

3. Till nedanstående uppgifter skall korta lösningar redovisas, samt svar anges, på anvisad plats. Endast lösningar och svar på detta blad, och på anvisad plats, beaktas.

(a) i) Låt $f : U \to \mathbb{R}$ vara en kontinuerlig funktion på en sluten mängd $U \subseteq \mathbb{R}^2$. Vilket av följande påståenden om dubbelintegralen $\iint_U f \mathrm{d}A$ är falskt?

A Dubbelintegralen existerar om U är begränsad.

B Dubbelintegralen representerar volymen under grafen $z = f(x, y)$ om $f \geq 0$.

C Dubbelintegralen existerar. (0.5p)

Svar: C är falskt. För exempel är $U = \mathbb{R}^2$ sluten men integralent av $f(x, y) = \sin(x)$ över $\mathbb{R}^2$ existerar ej.

ii) Är det sant att om $\vec{F} = (F_1, F_2) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ är ett glatt konservativt vektorfält, så överensstämmer den partiella derivatan av F_1 med avseende på x med den partiella derivatan av F_2 med avseende på y? (0.5p)

Svar: Nej, däremot överensstämmer den partiella derivatan av F_1 med avseende på y med den partiella derivatan av F_2 med avseende på x närhelst $\vec{F}$ är konservativt.

iii) Låt S vara en orienterad styckvis glatt yta och $\vec{F} : S \to \mathbb{R}^3$ ett glatt fält. Vilket av följande påståenden om yt- och flödesintegraler är sant?

A Ytintegralen $\iint_S \mathrm{d}S$ (arean av S) byter tecken om man vänder på orienteringen.

B Flödesintegralen $\iint_S \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{S}$ byter tecken om man vänder på orienteringen.

C Flödesintegralen $\iint_S \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{S}$ är lätt att räkna ut om $\vec{F}$ är konservativt. (0.5p)

Svar: B är det enda riktiga. Arean är oberoende av orientering och huruvida $\vec{F}$ är konservativt eller ej gör föga för uträkningen av en flödesintegral.

(b) Betrakta området $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 \leq y \leq x\}$. Skissa området D och skriv $\iint_D \mathrm{d}A$ på två sätt: genom att hitta integrationsgränserna för $\iint \mathrm{d}x\mathrm{d}y$ och sedan för $\iint \mathrm{d}y\mathrm{d}x$. Du behöver *ej* räkna ut integralen. (2p)

Lösning: Domänen skissas upp som att $x \in [0, 1]$ och $x^2 \leq y \leq x$, dvs området nedanför grafen $y = x$ och ovanför $y = x^2$ för x mellan 0 och 1. Vidare, $x^2 \leq y \leq x$ säger att $x^2 \leq y$, $y \leq x$ och $x, y \geq 0$. Vi kan lösa ut x och får olikheterna $x \leq \sqrt{y}$, $y \leq x$ och $x, y \geq 0$, det vill säga $D = \{(x, y) : y \leq x \leq \sqrt{y} \text{ och } y \geq 0\}$. Därmed är

$$\iint_D \mathrm{d}A = \int_{x=0}^{1} \int_{y=x^2}^{x} \mathrm{d}y\mathrm{d}x = \int_{y=0}^{1} \int_{x=y}^{\sqrt{y}} \mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

(c) i. Hitta en potential till vektorfältet $\vec{F}(x,y,z) = (6x\mathrm{e}^{3x^2}, \cos(y+3z), 3\cos(y+3z))$. (2p)

Lösning: Vi gör ansatsen $\vec{F} = \nabla\phi$, det vill säga

$$\begin{cases} \frac{\partial\phi}{\partial x} = 6x\mathrm{e}^{3x^2} \\ \frac{\partial\phi}{\partial y} = \cos(y+3z) \\ \frac{\partial\phi}{\partial z} = 3\cos(y+3z). \end{cases}$$

Första ekvationen ger $\phi(x,y,z) = \mathrm{e}^{3x^2} + C(y,z)$ för en funktion C som bara beror på y och z. Insättning i den andra ekvationen ger $\frac{C\phi}{\partial y} = \cos(y+3z)$ så $\phi(x,y,z) = \mathrm{e}^{3x^2} + \sin(y+3z) + D(z)$ för en funktion D som bara beror på z. Insättning i den tredje ekvation ger att $\frac{\partial D}{\partial z} = 0$. Vi sluter oss till att $\phi(x,y,z) = \mathrm{e}^{3x^2} + \sin(y+3z) + D$ för en konstant D.

ii. Räkna ut arbetet $\vec{F}$ utför längs kurvan $\vec{r}(t) = (t, t^2, t^3)$, $t \in [0,1]$. (1p)

Svar: Vi visade i a att $\vec{F}$ är konservativ och att $\phi(x,y,z) = \mathrm{e}^{3x^2} + \sin(y+3z)$ är en potential. Är arbetet längs kurvan $\mathcal{C}$ som $\vec{r}$ definierar given av

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{C}} \vec{F}\cdot \mathrm{d}\vec{r} &= \phi(\vec{r}(1)) - \phi(\vec{r}(0)) = \\ &= \phi(1,1,1) - \phi(0,0,0) = \mathrm{e}^3 + \sin(4) - \mathrm{e}^0 + \sin(0) = \mathrm{e}^3 + \sin(4) - 1. \end{aligned}$$

(d) Bestäm masscentrum av pyramiden med hörn i $(0,0,4)$, $(0,4,0)$, $(4,0,0)$ och $(0,0,0)$ vars densitet är konstant genom att använda den angivna formeln i formelsamlingen. Enbart referens till känd formel ger inga poäng. (3p)

Lösning: Kalla pyramiden K. Kroppen K är symmetrisk med avseende på att byta ut x, y och z med varandra, så $\bar{x} = \bar{y} = \bar{z}$. Vi bestämmer $\bar{x}$. Enligt definitionen är

$$\bar{x} = \frac{\iiint_K x\mathrm{d}V}{\iiint_K \mathrm{d}V}.$$

Vi börjar med att beskriva kroppen K. Kroppen är en pyramid, så den begränsas av fyra plan. Tre av planen är $x = 0$, $y = 0$ respektive $z = 0$. Det sista planet bestäms av att det skär x-axeln i $x = 4$, y-axeln i $y = 4$ och z-axeln i $z = 4$ så planet ges av $x + y + z = 4$. Därmed beskrivs kroppen av att $x, y, z \geq 0$ och $x + y + z \leq 4$. Vi delar upp det i integrationsgränser som att $0 \leq x \leq 4$, $0 \leq y \leq 4 - x$ och $0 \leq z \leq 4 - x - y$. Vi räknar ut volymen:

$$\iiint_K \mathrm{d}V = \int_{x=0}^{4}\int_{y=0}^{4-x}\int_{z=0}^{4-x-y} \mathrm{d}z\mathrm{d}y\mathrm{d}x = \int_{x=0}^{4}\int_{y=0}^{4-x}(4-x-y)\mathrm{d}y\mathrm{d}x =$$
$$= \int_{x=0}^{4}\left[(4-x)y - y^2/2\right]_{y=0}^{4-x}\mathrm{d}x = \int_{x=0}^{4}\frac{(4-x)^2}{2}\mathrm{d}x = \left[-\frac{(4-x)^3}{6}\right]_{x=0}^{4} = \frac{32}{3}.$$

Nästa steg är uträkningen

$$\iiint_K x\mathrm{d}V = \int_{x=0}^{4}\int_{y=0}^{4-x}\int_{z=0}^{4-x-y} x\mathrm{d}z\mathrm{d}y\mathrm{d}x = \int_{x=0}^{4}\int_{y=0}^{4-x} x(4-x-y)\mathrm{d}y\mathrm{d}x =$$
$$= \int_{x=0}^{4}\left[(4-x)xy - xy^2/2\right]_{y=0}^{4-x}\mathrm{d}x = \int_{x=0}^{4}\frac{x(4-x)^2}{2}\mathrm{d}x = [\text{partialintegration}]$$
$$= \left[-\frac{x(4-x)^3}{6}\right]_{x=0}^{4} + \int_{x=0}^{4}\frac{(4-x)^3}{6}\mathrm{d}x = \left[-\frac{(4-x)^4}{24}\right]_{x=0}^{4} = \frac{32}{3}.$$

Vi sluter oss till att $\bar{x} = 1$ och att masscentrum befinner sig i $(1, 1, 1)$.

Anonym kod	TMA044 Flervariabelanalys E2 2016-12-20	sid.nummer	Poäng

Till följande två uppgifter skall fullständig lösning redovisas på separat skrivpapper. Motivera och förklara så väl du kan.

4. Låt $\mathcal{C}$ vara den moturs orienterade randen till området i $\mathbb{R}^2$ som i polära koordinater ges av $1 \leq r \leq 2$ och $0 \leq \theta \leq \pi/2$. Beräkna arbetsintegralen $\oint_{\mathcal{C}} \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{r}$ där $\vec{F}(x, y) = (-y, x)$. (2.5p)

Lösning: Då $\mathcal{C}$ är randen till den kompakta domänen D som i polära koordinater ges av $1 \leq r \leq 2$ och $0 \leq \theta \leq \pi/2$. Området D har styckvis glatt rand och $\vec{F}$ är glatt i D så vi kan använda Greens sats. Vi använder Greens sats. Vi har att $\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} = 2$ så

$$\oint_{\mathcal{C}} \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{r} = \iint_D 2\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 2\mathrm{Area}(D).$$

Vi räknar ut arean av D som $\frac{1}{4}(\pi \cdot 2^2 - \pi) = 3\pi/4$ (genom att använda att arean av en disk med radie r är πr^2) så

$$\oint_{\mathcal{C}} \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{r} = \frac{3\pi}{2}.$$

5. Låt S beteckna ytan vilken utgör randen till kroppen i $\mathbb{R}^3$ definierad av olikheterna $\sqrt{x^2 + y^2} \leq z \leq \sqrt{1 - x^2 - y^2}$. Ytan S är orienterad som en rand, det vill säga med den utåtpekande normalen. Vi betraktar fältet $\vec{F}(x, y, z) = (x, y, z)$.

(a) Beräkna $\iint_{S_0} \vec{F} \cdot \hat{N}\mathrm{d}S$ där S_0 är delen av S på sfären $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ genom att ställa upp flödesintegralen och räkna ut den. (3p)

(b) Beräkna $\iint_S \vec{F} \cdot \hat{N}\mathrm{d}S$ på valfritt sätt. (3p)

Lösning a): S_0 är enligt a given av $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ och $z \geq 1/\sqrt{2}$. Den utåtpekande normalen på sfären ges av $\hat{N} = (x, y, z)$ så

$$\iint_{S_0} \vec{F} \cdot \hat{N}\mathrm{d}S = \iint_{S_0} (x^2 + y^2 + z^2)\mathrm{d}S = \iint_{S_0} \mathrm{d}S = \mathrm{Area}(S_0).$$

Vi räknar ut aren med hjälp av ytelementet

$$\mathrm{d}S = \frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}}.$$

Detta ytelementet räknas ut genom att skriva S_0 som grafen $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$. Alternativt kan man använda sfäriska koordinater.

Eftersom $z \geq 1/\sqrt{2}$ på S_0, är $1-x^2-y^2 \geq 1/2$ på S_0. Vi får därmed integrationsgränserna som $x^2+y^2 \leq 1/2$. Vi räknar meddelst polära koordinater ut att

$$\iint_{S_0} \mathrm{d}S = \iint_{x^2+y^2\leq 1/2} \frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{\sqrt{1-x^2-y^2}} = 2\pi \int_0^{1/\sqrt{2}} \frac{r\mathrm{d}r}{\sqrt{1-r^2}} = 2\pi \left[-\sqrt{1-r^2}\right]_0^{1/\sqrt{2}} = \pi(2-\sqrt{2}).$$

Lösning b): Ytan S är randen till kroppen K som definieras av olikheterna $\sqrt{x^2+y^2} \leq z \leq \sqrt{1-x^2-y^2}$. Fältet $\vec{F}$ är glatt på K så vi kan använda Gaußsats. Då $\nabla \cdot \vec{F} = 3$ så är

$$\begin{aligned}
\iint_S \vec{F} \cdot \hat{N} \mathrm{d}S &= 3 \iiint_K \mathrm{d}V = 3 \iint_{x^2+y^2\leq 1/2} \left(\int_{z=\sqrt{x^2+y^2}}^{\sqrt{1-x^2-y^2}} \mathrm{d}z \right) \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \\
&= 3 \iint_{x^2+y^2\leq 1/2} \left(\sqrt{1-x^2-y^2} - \sqrt{x^2+y^2} \right) \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \text{ [polära koordinater]} \\
&= 6\pi \int_0^{1/\sqrt{2}} \left(\sqrt{1-r^2} - r \right) r\mathrm{d}r = 6\pi \left[-\frac{1}{3}(1-r^2)^{3/2} - \frac{r^3}{3} \right]_0^{1/\sqrt{2}} = \\
&= 6\pi \left(-\frac{1}{6\sqrt{2}} - \frac{1}{6\sqrt{2}} + \frac{1}{3} \right) = \pi(2-\sqrt{2}).
\end{aligned}$$