Tentamen
TMA044 Flervariabelanalys

2017-08-25 kl. 8.30–12.30

Examinator: Magnus Goffeng , Matematiska vetenskaper, Chalmers

Telefonvakt: Claes Andersson, telefon: 5325

Hjälpmedel: bifogat formelblad, ej räknedosa

För godkänt på tentan krävs antingen 25 poäng på godkäntdelens två delar sammanlagt inklusive bonuspoäng, eller att båda delarna är godkända var för sig. För godkänt på del 1 krävs minst 10 poäng, för godkänt på del 2 krävs 13 poäng. Erhållen poäng på någon av delarna får ersätta poäng på motsvarande del på senare tentamen. För att få slutbetyg på kursen skall också Matlabmomentet vara godkänt. För betyg 4 eller 5 krävs dessutom 33 resp. 42 poäng sammanlagt på tentamens alla delar inklusive eventuella bonuspoäng.

Lösningar läggs ut på kursens webbsida första vardagen efter tentamensdagen. Tentan rättas och bedöms anonymt. Resultat meddelas via Ladok ca. tre veckor efter tentamenstillfället. Första granskningstillfälle meddelas på kurswebbsidan, efter detta sker granskning alla vardagar 9-13, MV:s exp. Lycka till!

Godkäntdelen, del 1

Se uppgift 1 och 2 på sida 3-4

Godkäntdelen, del 2

Uppgift 3, 4 och 5 se sida 5-7

Överbetygsdelen

Endast om man ligger enstaka poäng från godkänt och presterat riktigt bra på någon av följande uppgifter kan poäng på denna del räknas in för att nå godkäntgränsen. Normalt krävs för poäng på uppgift att man redovisat en fullständig lösningsgång, som i princip lett, eller åtminstone skulle kunnat leda, till målet.

6. (a) Visa att om $\mathbf{F}$ och $\mathbf{G}$ är vektorfält så gäller (4p)

$$\nabla \cdot (\mathbf{G} \times \mathbf{F}) = \mathbf{F} \cdot (\nabla \times \mathbf{G}) - \mathbf{G} \cdot (\nabla \times \mathbf{F})$$

(b) Visa att om $\mathbf{F}$ och $\mathbf{G}$ är virvelfria så är $\mathbf{G} \times \mathbf{F}$ källfritt. (2p)

Svar: a) Detta är en direkt räkning, och utelämnas.

Svar: b) Att $\mathbf{F}$ är virvelfritt innebär att $\nabla \times \mathbf{F} = 0$. Det följer nu direkt att om både $\mathbf{F}$ och $\mathbf{G}$ är virvelfria så är $\nabla \cdot (\mathbf{G} \times \mathbf{F}) = 0$, dvs. kryssprodukten av de båda vektorfälten är källfritt.

7. Räkna ut integralen $\iint_D \mathrm{e}^{(y-x)/(y+x)}\ \mathrm{d}x\mathrm{d}y$ där D är triangeln med hörn i $(0,0),(0,2),(2,0)$. (6p)

Svar: Det verkar rimligt att utföra variabelbytet $u = y - x, v = x + y$. Dess funktionaldeterminant är 2 så $\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \frac{1}{2}\mathrm{d}u\mathrm{d}v$. Eftersom $(x,y) \mapsto (u,v)$ är en linjär transformation kommer triangeln avbildas på en triangel T, med hörn i $(0,0),(-2,2),(2,2)$ i uv-planet. Integralen kan således skrivas som, om vi börjar integrera i v-riktning:

$$\frac{1}{2}\iint_T \mathrm{e}^{u/v}\ \mathrm{d}u\mathrm{d}v = \frac{1}{2}\int_0^2\int_{-v}^{v} \mathrm{e}^{u/v}\ \mathrm{d}u\mathrm{d}v = \frac{1}{2}\int_0^2 v(\mathrm{e}-\mathrm{e}^{-1})\ \mathrm{d}v = \mathrm{e}-\mathrm{e}^{-1}.$$

8. Låt $\mathbf{F} = (xz, -yz, x^2+y^2)$.

(a) Bestäm ett $\mathbf{G} = (0, g, h)$ så att $\nabla \times \mathbf{G} = \mathbf{F}$. (2p)

(b) Använd detta samband för att räkna ut flödet av $\mathbf{F}$ upp genom halvsfären (4p)

$$x^2 + y^2 + z^2 = 4,\ y \geq 0.$$

Svar: a) Ekvationen $\nabla \times \mathbf{G} = \mathbf{F}$ kan direkt skrivas som $h_y - g_z = xz, -h_x = -yz, g_x = x^2 + y^2$. Om vi integrerar de sista två ekvationerna med avseende på x kan vi gissa oss till att $h = xyz, g = x^3/3 + y^2x$. Detta uppfyller också den första av ekvationerna.

Svar: b) Stokes formel säger att

$$\int_S \nabla \times \mathbf{G} \cdot\ \mathrm{d}\vec{S} = \int_T \mathbf{G} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r}$$

där T är randen till S, det vill säga cirkeln med radie 2 i planet $y = 0$, orienterat moturs. Detta kan i sin tur parametriseras av $\mathbf{r}(t) = (2\cos t, 0, 2\sin t), t \in [0, 2\pi]$, så $\mathrm{d}\mathbf{r} = (-2\sin t, 0, 2\cos t)\ \mathrm{d}t$. Vi kan dock direkt se att eftersom $y = 0$ så är $\mathbf{G} \cdot\ \mathrm{d}\mathbf{r} = 0$. Alltså är flödet noll.

Anonym kod	TMA044 Flervariabelanalys 2017-08-25	sid.nummer	Poäng

Godkäntdelen: del 1

1. Till nedanstående uppgifter skall korta lösningar redovisas, samt svar anges, på anvisad plats. Endast lösningar och svar på detta blad, och på anvisad plats, beaktas.

(a) i) Låt $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ vara en funktion i 2 variabler. Om de båda partiella derivatorna f_x, f_y existerar i (a, b) så är f differentierbar i (a, b).

A Ja

B Nej (0.5p)

Svar: B, nej. I allmänhet behöver man kontinuitet för de partiella derivatorna i (a, b) för att kunna säga att f är differentierbar i (a, b).

ii) Vilken av följande är linjäriseringen av $f(x, y) = xy + \cos x$ i punkten $(0, 1)$.

A $1 + x$

B y

C $y + \sin x$ (0.5p)

Svar: A.

iii) Låt $f : U \to \mathbb{R}$ vara en differentierbar funktion på en domän $U \subseteq \mathbb{R}^2$. Vilket av följande påståenden är sant?

A Jacobianen till gradienten i en punkt (a, b) är Hessianen i punkten (a, b).

B Jacobianen är en flervariabel analog till andraderivatan av f.

C Om Lf är linjäriseringen av f i en punkt (a, b) så innebär det att om $f(x, y)$ ligger nära $Lf(x, y)$ så ligger (x, y) nära (a, b). (0.5p)

Svar: A.

(b) Låt $F(x, y) := e^{xy} - \sin x$. Bestäm tangentplanet till ytan i $\mathbb{R}^2$ definierad av ekvationen $F(x, y) = z$ i punkten $(0, 1, 1)$. (2p)

Svar: Tangentplanets ekvation för en allmän funktionsyta $z = f(x, y)$ i punkten (a, b, c) är $(f_x, f_y, -1) \cdot (x - a, y - b, z - c) = 0$. Här får vi $F_x = ye^{xy} - \cos x, F_y = xe^{xy}$. I punkten $(a, b) = (0, 1)$ får vi $F_x = 0, F_y = 0$. Således får vi att tangentplanets ekvation ges av $z = 1$.

(c) Låt $\mathcal{C} \subseteq \mathbb{R}^2$ vara kurvan given av $x^2 + 2x + y^2 - 4y = 4$.

i. Ange en parametrisering av kurvan. (1p)

Svar: Vi kan komplettera kvadraterna och får då $(x+1)^2 + (y-2)^2 = 9$. Alltså kan vi sätta $x = -1 + 3\cos t, y = 2 + 3\sin t, t \in [0, 2\pi]$.

ii. Bestäm längden av $\mathcal{C}$ genom att sätta upp den relevanta integralen och räkna ut den. (2p)

Svar: Längden av en kurva parametriserad av $\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t)), t \in [a, b]$ ges av $\int_a^b \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} dt$. Vi får $x'(t)^2 = 9\sin^2 t, y'(t)^2 = 9\cos^2 t$. Integralen får vi direkt utifrån den trigonometriska ettan att längden är 6π. Detta är också uppenbart utifrån beskrivningen av kurvan som en cirkel av radie 3 med centrum i $(-1, 2)$.

(d) Låt $f = f(z, w)$ vara en två gånger differentierbar funktion. Beräkna i termer av de partiella derivatorn med avseende på x, y ut $\frac{\partial^2}{\partial s \partial t} f(x, y)$ där $x = s + t, y = s - t$. (3p)

Svar: Från kedjeregeln får vi

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t} = f_x - f_y.$$

Applicerande kedjeregeln igen på f_x får vi

$$\frac{\partial f_x}{\partial s} = \frac{\partial f_x}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial f_x}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s} = f_{xx} + f_{xy}.$$

Samma beräkning med f_y ger oss $\frac{\partial f_y}{\partial s} = f_{yx} + f_{yy}$. Om vi lägger ihop dessa får vi $\frac{\partial^2}{\partial s \partial t} f(x, y) = f_{xx} - f_{yy}$.

Till följande uppgift skall fullständig lösning redovisas på separat skrivpapper. Motivera och förklara så väl du kan.

2. Betrakta funktionen $f(x, y, z) = xy^2z^3$ och $P = (1, 1, 1)$.

(a) Bestäm med hjälp av Lagranges metod lokala maximum och minimum under bivillkoret $x + 2y + 3z = 6, x, y, z > 0$. (3p)

(b) Bestäm den linjäriseringen av f i punkten P, samt riktningsderivatan av f i P i riktningen $(1, 0, 0)$. (1.5p)

Svar: a) Lagranges multiplikatormetod ansätter en funktion $L(x, y, z, \lambda) = f(x, y, z) + \lambda(x + 2y + 3z - 6)$ och letar efter kritiska punkter till denna. Vi får systemet av ekvationer, efter en mindre förenkling:

- $y^2z^3 + \lambda = 0$
- $xyz^3 + \lambda = 0$
- $xy^2z^2 + \lambda = 0$
- $x + 2y + 3z = 6$.

Alltså får vi från de två första $y^2z^3 = xyz^3$, och eftersom alla x, y, z är icke-noll så är $x = y$. Från de nästa två ekvationerna får vi $xyz^3 = xy^2z^2$ så att $z = y$ dvs. $x = y = z$. Insättning i sista ekvationen ger $6x = 6$ så att en kritisk punkt är $(1, 1, 1)$. Uppgiften efterfrågar det inte, men det går att visa att detta är ett lokalt maximum.

Svar: b) Linjärisering av f i en punkt (a, b, c) ges av $Lf(x, y, z) = f(a, b, c) + \nabla f(a, b, c) \cdot (x - a, y - b, z - c)$. Eftersom $f(1, 1, 1) = 1$ och $\nabla f(1, 1, 1) = (1, 2, 3)$ får vi att linjäriseringen ges av

$$1 + x + 2y + 3z - 6 = -5 + x + 2y + 3z.$$

Anonym kod	TMA044 Flervariabelanalys 2017-08-25	sid.nummer	Poäng

Godkäntdelen: del 2

3. Till nedanstående uppgifter skall korta lösningar redovisas, samt svar anges, på anvisad plats. Endast lösningar och svar på detta blad, och på anvisad plats, beaktas.

(a) i) Låt $f : U \to \mathbb{R}$ vara en kontinuerlig funktion på en kompakt mängd $S \subseteq \mathbb{R}^2$. Vilket av följande påståenden om dubbelintegralen $\iint_S f \mathrm{d}A$ är i allmänhet falskt?

A Om $f = 1$ är integralen arean av S.

B Integralen är en volym, om $f > 0$.

C Integralen är ett positivt tal. (0.5p)

Svar: **C** är falskt. Om f är negativ så kan integralen vara negativ.

ii) Är det sant att om $\vec{F} = (F_1, F_2) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ är ett glatt konservativt vektorfält, så överensstämmer den partiella derivatan av F_1 med avseende på x med den partiella derivatan av F_2 med avseende på y? (0.5p)

Svar: Nej.

iii) Låt $\phi(x, y) = x^2 - 2x + 1 + y^2 - 4y + 4$ vara potentialen till ett vektorfält F. Vilka av följande påstående stämmer inte?

A Fältlinjerna är räta linjer.

B Ekvipotentialkurvorna är cirklar med centrum i $(x, y) = (1, 2)$.

C Linjeintegralen av F längs en kurva från $(0, 0)$ till $(1, 1)$ är lika med -2. (0.5p)

Svar: **C** stämmer inte, utan arbetet ges av $\phi(1, 2) - \phi(0, 0) = 0 - 5 = -5$.

(b) Räkna ut arean till ytan $x^2 + y^2 = z, 0 \leq z \leq 1$. (2.5p)

Svar: Eftersom ytan är en funktionsyta så ges ett ytarea-element $\mathrm{d}S$ av formeln $\sqrt{f_x^2 + f_y^2 + 1}\ \mathrm{d}x\mathrm{d}y$. I detta fallet får vi $\sqrt{4x^2 + 4y^2 + 1}\ \mathrm{d}x\mathrm{d}y$. Projicering ner på xy-planet av ytan motsvarar enhetsdisken, som vi kan parametrisera med polära koordinater $x = r\cos t$, $y = r\sin t$, $\mathrm{d}x\mathrm{d}y = r\ \mathrm{d}r\mathrm{d}t$. Arean blir således

$$\int_0^1 \int_0^{2\pi} \sqrt{4r^2 + 1} r\ \mathrm{d}r\mathrm{d}t = 2\pi \int_0^1 \sqrt{4r^2 + 1} r\ \mathrm{d}r.$$

Detta löses enklast med variabelsubstitutionen $u = 4r^2 + 1$ så att $1/8 du = r\ \mathrm{d}r$ och integralen blir $\frac{1}{8}\int_1^5 \sqrt{u}\ \mathrm{d}u = \frac{1}{8}[\frac{2}{3}u^{3/2}]_1^5 = \frac{1}{12}(5^{3/2} - 1)$. Arean blir alltså

$$\frac{\pi}{6}(5^{3/2} - 1).$$

(c) i. Låt $\vec{G}(x,y) = (2x^3y^4 + x, 2x^4y^3 + y)$. Avgör om $\vec{G}$ är konservativt. (2p)

Svar: Om $\vec{G}$ är konservativt är det lika med (ϕ_x, ϕ_y) för någon funktion ϕ. Från dessa derivator får vi $\phi = x^4y^4/2 + x^2/2 + y^2/2$. Alternativt kan man verifiera att $\nabla \times \vec{G} = 0$, eftersom området är enkelt sammanhängande finns på en potential.

ii. Räkna ut arbetet $\vec{G}$ utför längs kurvan $\vec{r}(t) = \left(t\cos(\pi t) - 1, \sin\left(\frac{\pi t}{2}\right)\right)$, $t \in [0,1]$. (1p)

Svar: Arbetet som utförs beror bara på ändpunkterna $(-1,0)$ och $(-2,1)$ eftersom $\vec{G}$ är konservativt och ges av $\phi(-2,1) - \phi(-1,0) = 10$.

(d) Beräkna

$$\iint_D \left(\frac{x-y}{x+y+2}\right)^2 \, \mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

där D är kvadraten med hörn i $(-1,0), (1,0), (0,1), (0,-1)$. Tips: Använd variabelsubstitutionen $u = x+y, v = x-y$. (3p)

Svar: Funktionaldeterminanten för variabelsubstitutionen

$$(x,y) \mapsto (u,v) = (x+y, x-y)$$

är 2, så $\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \frac{1}{2}\mathrm{d}u\mathrm{d}v$. Eftersom kvadraten med hörnen som beskrivet är begränsad av $x+y = \pm 1, x-y = \pm 1$ får vi att integralen ifråga blir

$$\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\left(\frac{v}{u+2}\right)^2 \, \mathrm{d}u\mathrm{d}v = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} v^2 \, \mathrm{d}v \int_{-1}^{1} \frac{1}{(u+2)^2} \, \mathrm{d}u.$$

Dessa är standardintegraler i en variabel, och varje integral blir $\frac{2}{3}$ så det slutgiltiga svaret blir $\frac{1}{2}\frac{2}{3}\frac{2}{3} = \frac{2}{9}$.

Anonym kod	**TMA044 Flervariabelanalys 2017-08-25**	sid.nummer	Poäng

Till följande två uppgifter skall fullständig lösning redovisas på separat skrivpapper. Motivera och förklara så väl du kan.

4. (a) Låt D vara en kompakt område i $\mathbb{R}^2$, med styckvis glatt rand C utrustad med moturs orientering. Visa att $\int_C x\mathrm{d}y = \mathrm{Area}(D)$. (1p)

   (b) Bestäm arean av området som omsluts av kurvan

$$\vec{r}(t) = (\sin(2t), \sin(t)), \quad t \in [0, \pi].$$

(3p)

Svar: a) Detta följer direkt från Greens formel som säger att

$$\int_C P\ \mathrm{d}x + Q\ \mathrm{d}y = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\ \mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

med valet $Q = x, P = 0$.

Svar: b) Vi tillämpar föregående formel. Eftersom $y = \sin t$ får vi $\mathrm{d}y = \cos(t)\mathrm{d}t$ och kombinerat med $x = \sin(2t)$ erhåller vi att

$$x\mathrm{d}y = \sin(2t)\cos t\mathrm{d}t = 2\cos^2(t)\sin(t)\mathrm{d}t.$$

Integralen $2\int_0^\pi \cos^2(t)\sin(t)\mathrm{d}t$ löses genom variabelsubstitionen $u = \cos(t)$ eftersom då $\mathrm{d}u = -\sin(t)\mathrm{d}t$ och integralen blir $2\int_1^{-1} -u^2\mathrm{d}u = 4/3$.

5. Låt S vara enhetssfären centrerad i origo. Bestäm flödet av $\vec{F}(x, y, z) = (2x, y^2, z^2)$ ut genom S. (4p)

Svar: Vi använder Gauss divergenssats som säger att flödet ut ur S av $\vec{F}$ ges av $\iiint_B \operatorname{div} \vec{F}\mathrm{d}V$ där B är enhetsbollen. Divergensen ges av formeln

$$\operatorname{div} \vec{F} = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z} = 2 + 2y + 2z.$$

Alltså får vi att flödet ges av formeln

$$2\iiint_B \mathrm{d}V + 2\iiint_B y\mathrm{d}V + 2\iiint_B z\mathrm{d}V = 2\,\mathrm{Vol}(B) = 8\pi/3.$$

De två andra integralerna är volymen gånger medelvärdet för y respektive z på B, dvs. 0.