

# TMA044 Flervariabelanalys E2, läsåret 2017/18

## Vecko-PM läsvecka 2

### Calculus: 12.3 - 12.8

Kapitel 12 handlar om funktioner av flera variabler. I veckans avsnitt skall vi arbeta med en del begrepp som är välkända från envariabelanalysen men nu i en mer generell tappning. I huvudsak handlar det om att derivera funktioner av flera variabler och använda derivata för att på olika sätt beskriva och approximera sådana funktioner. Derivatans av en reellvärd funktion  $f(x)$  av en variabel i en punkt  $x_0$  mäter hur ”snabbt/långsamt” funktionsvärdena förändras i en omgivning av  $x_0$  och man vill att derivatan skall ha samma betydelse även för funktioner  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  av flera variabler. Det är dock inte givet hur man skall mäta denna förändring eftersom vi i omgivning av en punkt i  $\mathbb{R}^n$  har oändligt många riktningar att ta hänsyn till.

De *partiella derivatorna* mäter förändringshastigheten i axelparallella riktningar och med dessa, samlade i en vektor som kallas *gradienten*, kan vi sedan enkelt bestämma förändringshastigheten i alla andra riktningar genom s.k. *riktningsderivata*. I många situationer behöver man kunna hantera sammansättningar av funktioner, t.ex. vid variabelbyten, och för att derivera sådana sammansättningar finns en *kedjeregeln*, liknande den för funktioner av en variabel. Första ordningens derivator innehåller värdefull information om en funktions beteende och med dess hjälp kommer vi bl.a. beräkna approximativa funktionsvärden, genom *linjäriseringen* eller *differentialen*, och bestämma *tangentplan* till funktionsytor och nivåytor. Vi kommer införa begreppet *differentierbar* vilket är den naturliga motsvarigheten till deriverbarhet för funktioner av en variabel.

Avsnittet 12.8 handlar om implicit definierade funktioner och hur man kan bestämma derivatorna till sådana funktioner. Innehållet i avsnittet är nyttig kunskap för alla men examineras endast för överbetyg.

### Rekommenderade uppgifter

Avsnitt	Godkäntnivå		Överbetygsnivå
	Instuderingsuppgifter	Träningsuppgifter	
12.3	3, 5, 17, 19, 27	23, 31	36, 37, 38
12.4	5, 7	11, 18	15, 16
12.5	1, 3, 7, 11, 15	17, 19, 31	21, 24, 33
12.6	5, 7, 19	11, 17, 18	21, 25
12.7	3, 7, 11, K: 9, 10	17, 19, 21a-d	20, 21e, 27, 29
12.8			3, 15, 16

**Lärmål:****För att bli godkänd på kursen skall du kunna:**

Adams	Mål
12.3 12.5	de olika beteckningarna för partiell derivata och beräkna partiella derivator genom att tillämpa deriveringsregler för funktioner av en variabel samt kedjeregeln.
12.3	bestämma tangentplan och normallinje till funktionsyta.
12.4 12.5	beräkna partiella derivator av högre ordning genom att tillämpa deriveringsregler för funktioner av en variabel samt kedjeregeln.
12.6	beräkna linjäriseringen och differentialen för en reellvärd funktion och utnyttja dessa till approximativ beräkning av funktionsvärden.
12.6	beräkna Jacobimatrisen och differentialen för en vektorvärd funktion och utnyttja denna till approximativ beräkning av funktionsvärden.
12.7	beräkna gradient och riktningsderivata $D_{\mathbf{u}}f(\mathbf{a})$ då $\ \mathbf{u}\  = 1$ (med sats 12.7.7) till en funktion av två eller tre variabler samt utnyttja deras egenskaper (se definition 12.7.7, markerad ruta s 718) vid problemlösning (se t.ex. exempel 3 och 4).
12.7	bestämma ekvationer för tangentlinje och normallinje till nivåkurva samt tangentplan och normallinje till nivåyta (se sats 12.7.6 och t.ex. exempel 6).

**För överbetyg skall du också kunna:**

Adams	Mål
12.3	definiera begreppet partiell derivata och härleda tangentplanets ekvation.
12.6	definiera begreppet differentierbar funktion.
12.6	redogöra för relationerna mellan egenskaperna för en funktion: kontinuerlig, kontinuerliga partiella derivator samt differentierbar
12.6	formulera och bevisa kedjeregeln för $g \circ f$ då $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ och $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ samt formulera kedjeregeln på matrisform för $\mathbf{g} \circ \mathbf{f}$ då $\mathbf{f} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ och $\mathbf{g} : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^k$ (se sid. 709).
12.7	definiera begreppen gradient och riktningsderivata, redogöra för och bevisa deras egenskaper (sats 12.7.6, sats 12.7.7 samt markerad ruta s 718).
12.8	visa att en ekvation eller ett system av ekvationer lokalt definierar en funktion implicit samt beräkna funktionens partiella derivator.
12.8	känna till sambandet mellan Jacobideterminanten till en transformation och Jacobideterminanten till inversen (sid. 733).