Deltentamen
godkäntdelen, del 1 (med lösningar)

TMA044 Flervariabelanalys

2017-09-23 kl. 8:30-11:30

Examinator: Daniel Persson , Institutionen för Matematiska Vetenskaper, Chalmers

Telefonvakt: Edvin Wedin, telefon: 031-772 5325

Hjälpmedel: bifogat formelblad, ej räknedosa

Tentamen på kursen består av tre delar; del 1 och del 2 av godkäntdelen samt överbetygsdelen. Denna deltenta täcker endast den första av dessa tre delar. För godkänt på tentamen som helhet krävs antingen 25 poäng på godkäntdelens två delar sammanlagt, eller att båda delarna är godkända var för sig. För godkänt på del 1 krävs minst 10 poäng, för godkänt på del 2 krävs 13 poäng, alternativt 25 poäng totalt på del 1, del 2. Erhållen poäng på någon av delarna får ersätta poäng på motsvarande del på senare tentamen tills. För godkänt på kursen skall också Matlabmomentet vara godkänt. För betyg 4 eller 5 krävs dessutom 33 resp. 42 poäng sammanlagt på tentamens alla delar.

Lösningar läggs ut på kursens webbsida första vardagen efter tentamensdagen. Tentan rättas och bedöms anonymt. Resultat meddelas i samband med undervisningen senast tre veckor efter tentamenstillfället.

Godkäntdelen, del 1

se uppgift 1 och 2 på nästa blad

Lycka till!
Daniel Persson

Anonym kod	TMA044 Flervariabelanalys 2017-09-23	sid.nummer	Poäng

Godkäntdelen: del 1

1. Till nedanstående uppgifter skall korta lösningar redovisas, samt svar anges, på separat skrivpapper.

(a) i. Ange om följande påstående om en godtycklig funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ är sant eller falskt. (0.5p)

Påstående: *Om båda de partiella derivatorna av $f(x, y)$ existerar och är kontinuerliga i en punkt (a, b) så är f differentierbar i (a, b).*

Rätt svar: Sant

ii. Låt $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ vara differentierbar i en punkt (a, b, c). Vilket alternativ nedan ger ekvationen för tangentplanet till nivåytan $f(x, y, z) = 0$ i punkten (a, b, c)? (0.5p)

A $f(a, b) + f_1(a, b)(x - a) + f_2(a, b)(y - b) = z$

B $f_1(a, b)(x - a) + f_2(a, b)(y - b) - (z - c) = 0$

C $f_1(a, b, c)(x - a) + f_2(a, b, c)(y - b) + f_3(a, b, c)(z - c) = 0$

D $f_1(a, b, c)(x - a) + f_2(a, b, c)(y - b) - f_3(a, b, c)(z - c) = f(a, b, c)$

Rätt svar: C.

iii. Låt $U \subset \mathbb{R}^2$ och $f : U \to \mathbb{R}$ vara en kontinuerlig funktion på U. Vilket av följande påståenden är korrekt? (0.5p)

A Om U är sluten så antar f ett lokalt maximum på U.

B Om U är sluten och begränsad så antar f ett globalt maximum på U.

C Om U är sammanhängande så antar f ett globalt maximum på U.

D Om U är begränsad så antar f ett lokalt maximum på U.

Rätt svar: B

(b) Låt $\mathbf{r}(t) = (2 + 2\cos(t))\mathbf{i} + (-2 + \sin(t))\mathbf{j} + \mathbf{k}$ vara positionsvektorn för en partikel som rör sig längs en kurva $\mathcal{C}$ i $\mathbb{R}^3$, där t är en parameter som motsvarar tiden.

i. Skriv upp en ekvation för kurvan $\mathcal{C}$ och beskriv vilken typ av kurva det är. (1p)

ii. Bestäm partikelns fart efter 1 tidsenhet. I vilken punkt i rummet befinner sig partikeln vid denna tidpunkt? (1p)

iii. Bestäm hur långt partikeln färdas mellan $t = 0$ och $t = 2\pi$. (1p)

Lösning: (i) Från positionsvektorn läser vi av

$$x(t) = 2 + 2\cos(t), \qquad y(t) = -2 + \sin(t), \qquad z(t) = 1, \tag{1}$$

Genom att använda trigonometriska ettan kan vi dra slutsatsen att följande relation är uppfylld:

$$\frac{(x-2)^2}{4} + (y+2)^2 = 1. \tag{2}$$

Partikeln rör sig alltså i en ellips i planet $z = 1$ med centrum i punkten $(2, -2)$.

(ii) Farten ges av

$$v(t) = |\mathbf{r}'(t)| = \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2} = \sqrt{4(\sin t)^2 + (\cos t)^2}. \tag{3}$$

För $t = 1$ har vi alltså $v(1) = \sqrt{4(\sin 1)^2 + (\cos 1)^2}$.

(iii) Längden på kurvan mellan 0 och 2π ges av integralen

$$\int_0^{2\pi} v(t)dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{4(\sin t)^2 + (\cos t)^2}dt. \tag{4}$$

Detta är en elliptisk integral och går inte att lösa exakt...

(c) Låt $f(x, y)$ vara en funktion av två variabler där godtyckligt många kontinuerliga partiella derivator existerar, och där $x(u, v) = u^2 v$ och $y(u, v) = u \sin v$. Sätt $g(u, v) = f(x(u, v), y(u, v))$ och bestäm andraderivatorna $\frac{\partial^2 g}{\partial u \partial v} = \frac{\partial^2 g}{\partial v \partial u}$ uttryckt i de partiella derivatorna $f_1, f_2, f_{11}, f_{12}, f_{21}, f_{22}$ av $f(x, y)$. (3p)

Lösning: Vi börjar med att beräkna alla relevanta partiella derivator av x och y:

$$x_1 = 2uv, \quad x_2 = u^2. \quad y_1 = \sin v, \quad y_2 = u \cos v, \quad x_{12} = 2u, \quad y_{12} = \cos v. \tag{5}$$

Vi får då

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 g}{\partial v \partial u} &= \frac{\partial}{\partial v}\left(f_1 x_1 + f_2 y_1\right) \\
&= \left(f_{11} x_2 + f_{12} y_2\right) x_1 + f_1 x_{12} \\
&\quad \left(f_{21} x_2 + f_{22} y_2\right) y_1 + f_2 y_{12} \\
&= 2u^3 v f_{11} + u \sin v \cos v\, f_{22} + 2u f_1 + \cos v\, f_2 + u^2(2v \cos v + \sin v) f_{12}.
\end{aligned} \tag{6}$$

(d) Låt $f(x, y, z) = \sin x\, e^{xyz}$. Bestäm ekvationen för tangentplanet till nivåytan $f(x, y, z) = 0$ i punkten $(\pi,\, 0,\, 0)$. (2p)

Lösning: Ekvationen för tangentplanet till en nivåyta $f(x, y, z) = 0$ i en punkt (a, b, c) ges av

$$f_1(a, b, c)(x - a) + f_2(a, b, c)(y - b) + f_3(a, b, c)(z - c) = 0. \tag{7}$$

Vi beräknar de partiella derivatorna

$$\begin{aligned}
f_1(x, y, z) &= \cos x\, e^{xyz} + zy \sin x\, e^{xyz} \\
f_2(x, y, z) &= zx \sin x\, e^{xyz} \\
f_3(x, y, z) &= yx \sin x\ e^{xyz}.
\end{aligned} \tag{8}$$

I punkten $(\pi, 0, 0)$ får vi

$$f_1(\pi, 0, 0) = -1, \qquad f_2(\pi, 0, 0) = f_3(\pi, 0, 0) = 0. \tag{9}$$

Insättning i ekv. (7) ger då tangentplanets ekvation i punkten $(\pi, 0, 0)$:

$$-1 \cdot (x - \pi) + 0 \cdot (y - 0) + 0 \cdot (z - 0) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x = \pi. \tag{10}$$

Tangentplanet ges således av $x = \pi$.

Till följande uppgift skall fullständig lösning redovisas på separat skrivpapper. Motivera och förklara så väl du kan.

2. Låt $f(x, y) = x^3 + y^2 - 6xy$.

(a) Bestäm och klassificera kritiska punkter till f. (3p)

(b) Bestäm Taylorpolynomet av grad 2 i punkten $(0, 0)$. Ange svaret på formen $f(h, k) \approx \dots$. (1p)

(c) Bestäm riktningsderivatan av $f(x, y)$ i punkten $(1, 0)$ i riktningen $\mathbf{i} + \mathbf{j}$. (0.5p)

Lösning: (a) Vi söker kritiska punkter och beräknar gradienten

$$\nabla f(x, y) = (3x^2 - 6y, 2y - 6x). \tag{11}$$

Vi måste därför lösa följande ekvationssystem:

$$3x^2 - 6y = 0 \tag{12}$$
$$2y - 6x = 0 \tag{13}$$

Vi ser direkt att $(x, y) = (0, 0)$ är en lösning. För att undersöka om det finns fler lösningar sätter vi in ekv. (2), $y = 3x$ i ekv. (1) vilket ger:

$$3x^2 - 6y = 3x^2 - 18x = 0 \quad \Longleftrightarrow x^2 = 6x. \tag{14}$$

Denna ekvation har endast en lösning, nämligen $x = 6$, vilket ger $y = 3 \cdot 6 = 18$. Vi har därför funnit att det finns två kritiska punkter:

$$(0, 0), \qquad (6, 18). \tag{15}$$

För att klassificera dessa beräknar vi Hessianen:

$$H(f)(x, y) = \begin{pmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{21} & f_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6x & -6 \\ -6 & 2 \end{pmatrix}. \tag{16}$$

I de kritiska punkterna har vi således

$$\det H(f)(0, 0) = -36, \qquad \det H(f)(6, 18) = 36. \tag{17}$$

Hessianen är alltså indefinit för $(0, 0)$ vilket betyder att detta är en *sadelpunkt*, medan för $(6, 18)$ är den positivt definit (eftersom $\det H(f)(6, 18) > 0$ och $f_{11}(6, 18) = 36 > 0$), och detta är således ett *lokalt minimum*:

$$(0, 0) \quad \text{sadelpunkt}, \qquad (6, 18) \quad \text{lokalt minimum}. \tag{18}$$

(b) Taylorpolynomet i punkten $(0, 0)$ ges av

$$f(h, k) \approx f(0, 0) + hf_1(0, 0) + kf_2(0, 0) + \frac{1}{2}\Big(h^2 f_{11}(0, 0) + 2hk f_{12}(0, 0) + k^2 f_{22}(0, 0)\Big) + \cdots \tag{19}$$

Eftersom $(0, 0)$ är en kritisk punkt och dessutom $f(0, 0) = 0$ kontrolleras Taylorpolyomet upp till ordning två helt av andra ordningens termer och insättning av andraderivatorna från (a)-uppgiften ger:

$$f(h, k) \approx k^2 - 6hk + \cdots \tag{20}$$

(c) Riktningsderivatan i riktning $\mathbf{u}$ (där $|\mathbf{u}| = 1$) ges av

$$D_{\mathbf{u}} f(x,y) = \mathbf{u} \cdot \nabla f(x,y). \tag{21}$$

Vi skall beräkna riktningsderivatan i riktning $\mathbf{i}+\mathbf{j}$. Detta är dock inte en enhetsvektor: $|\mathbf{i}+\mathbf{j}| = \sqrt{2}$. Vi normaliserar därför och definierar

$$\mathbf{u} = \frac{\mathbf{i}+\mathbf{j}}{\sqrt{2}}. \tag{22}$$

Riktningsderivatan i punkten $(1,0)$ ges då av

$$D_{\mathbf{u}} f(1,0) = \frac{1}{\sqrt{2}} f_1(1,0) + \frac{1}{\sqrt{2}} f_2(1,0) = \frac{3}{\sqrt{2}} - \frac{6}{\sqrt{2}} = -\frac{3}{\sqrt{2}}. \tag{23}$$

Formelblad för TMA044

Trigonometri.

$$\cos(x+y) = \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y)$$

$$\sin(x+y) = \sin(x)\cos(y) + \cos(x)\sin(y)$$

$$\cos(x)\cos(y) = \frac{1}{2}(\cos(x-y) + \cos(x+y))$$

$$\sin(x)\sin(y) = \frac{1}{2}(\cos(x-y) - \cos(x+y))$$

$$\sin(x)\cos(y) = \frac{1}{2}(\sin(x-y) + \sin(x+y))$$

$$\tan(x+y) = \frac{\tan(x)+\tan(y)}{1-\tan(x)\tan(y)}$$

Integralkatalog

$$\int x^a\,dx = \frac{x^{a+1}}{a+1} + C \quad , \quad a \neq -1$$

$$\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + C$$

$$\int \sin x\,dx = -\cos x + C$$

$$\int \cos x\,dx = \sin x + C$$

$$\int \frac{1}{\cos^2 x}\,dx = \tan x + C$$

$$\int \frac{1}{\sin^2 x}\,dx = -\cot x + C$$

$$\int e^x\,dx = e^x + C$$

$$\int a^x\,dx = \frac{a^x}{\ln a} + C \ , \ 0 < a \neq 1$$

$$\int \frac{1}{x^2+a^2}\,dx = \frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a} + C \ , \ a \neq 0$$

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \ln|f(x)| + C$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{a-x^2}}\,dx = \arcsin\frac{x}{\sqrt{a}} + C \ , \ a > 0$$

$$\int \sqrt{a-x^2}\,dx = \frac{1}{2}x\sqrt{a-x^2} + \frac{a}{2}\arcsin\frac{x}{\sqrt{a}} + C \ , \ a > 0$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+a}}\,dx = \ln|x+\sqrt{x^2+a}| + C \ , \ a \neq 0$$

$$\int \sqrt{x^2+a}\,dx = \frac{1}{2}(x\sqrt{x^2+a} + a\ln|x+\sqrt{x^2+a}|) + C$$

Maclaurinutvecklingar

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{k!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$$

$$\sin x = \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}\frac{x^{2k-1}}{(2k-1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots$$

$$\cos x = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^{k}\frac{x^{2k}}{(2k)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots$$

$$(1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^{\infty}\binom{\alpha}{k}x^k = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \dots \quad , \quad |x| < 1 \quad , \quad \binom{\alpha}{k} = \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-k+1)}{k(k-1)\dots 1}$$

$$\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{x^k}{k} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots \quad , \quad -1 < x \leq 1$$

$$\arctan x = \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}\frac{x^{2k-1}}{2k-1} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots \quad , \quad |x| \leq 1$$

Övrigt

Masscentrum (x_T, y_T, z_T) för Ω ges av $x_T = \dfrac{\iiint_\Omega x\rho(x,y,z)\,dxdydz}{\iiint_\Omega \rho(x,y,z)\,dxdydz}$, analogt för y_T, z_T.

$\rho(x,y,z)$ är densiteten.