Deltentamen
godkäntdelen, del 1

TMA044 Flervariabelanalys

2018-09-29 kl. 8:30-11:30

Examinator: Daniel Persson , Institutionen för Matematiska Vetenskaper, Chalmers

Telefonvakt: Jimmy Aronsson, telefon: 031-772 5325

Hjälpmedel: bifogat formelblad, ej räknedosa

Tentamen på kursen består av tre delar; del 1 och del 2 av godkäntdelen samt överbetygsdelen. Denna deltenta täcker endast den första av dessa tre delar. För godkänt på tentamen som helhet krävs antingen 25 poäng på godkäntdelens två delar sammanlagt, eller att båda delarna är godkända var för sig. För godkänt på del 1 krävs minst 10 poäng, för godkänt på del 2 krävs 13 poäng, alternativt 25 poäng totalt på del 1, del 2. Erhållen poäng på någon av delarna får ersätta poäng på motsvarande del på senare tentamen. För godkänt på kursen skall också Matlabmomentet vara godkänt. För betyg 4 eller 5 krävs dessutom 33 resp. 42 poäng sammanlagt på tentamens alla delar.

Lösningar läggs ut på kursens webbsida första vardagen efter tentamensdagen. Tentan rättas och bedöms anonymt. Resultat meddelas i samband med undervisningen senast tre veckor efter tentamenstillfället.

Godkäntdelen, del 1

se uppgift 1 och 2 på nästa blad

Lycka till!
Daniel Persson

Anonym kod	TMA044 Flervariabelanalys 2018-09-29	sid.nummer	Poäng

Godkäntdelen: del 1

1. Till nedanstående uppgifter skall korta lösningar redovisas, samt svar anges, på separat skrivpapper.

(a) i. Ange om följande påstående om en funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ är sant eller falskt. (0.5p)

Påstående: *Om gränsvärdet då $(x, y) \to (a, b)$ för $f(x, y)$ existerar, så är*

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x, y) = f(a, b).$$

Rätt svar: Falskt

ii. Låt $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ vara differentierbar i en punkt (a, b, c). Vilket alternativ nedan ger ekvationen för tangentplanet till nivåytan $f(x, y, z) = 0$ i punkten (a, b, c)? (0.5p)

A $f(a, b) + f_1(a, b)(x - a) + f_2(a, b)(y - b) = z$

B $f_1(a, b)(x - a) + f_2(a, b)(y - b) - (z - c) = 0$

C $f_1(a, b, c)(x - a) + f_2(a, b, c)(y - b) + f_3(a, b, c)(z - c) = 0$

D $f_1(a, b, c)(x - a) + f_2(a, b, c)(y - b) - f_3(a, b, c)(z - c) = f(a, b, c)$

Rätt svar: C.

iii. Vilka av följande påståenden är korrekta? (0.5p)

A Om (a, b) är en maxpunkt till funktionen $f(x, y)$ på en kompakt domän i xy-planet så måste vi ha $\nabla f(a, b) = 0$.

B Om en partikel rör sig med konstant fart så måste accelerationen vara vinkelrät mot hastigheten.

C Gradienten till en funktion ger en linjär approximation till funktionen.

D En partikel som rör sig med konstant fart har ingen acceleration.

Rätt svar: B,C

(b) Låt $\mathbf{r}(t) = 2\cos t\mathbf{i} + \sqrt{13}\sin t\mathbf{j} - 3\cos t\mathbf{k}$ vara positionsvektorn för en partikel som rör sig längs en kurva $\mathcal{C}$ i $\mathbb{R}^3$, där t är en parameter som motsvarar tiden.

i. Beskriv kurvan $\mathcal{C}$ genom att ange en eller flera ekvationer som begränsar koordinaterna (x, y, z) i $\mathbb{R}^3$. (1p)

Lösning: Om vi skriver positionsvektorn som

$$\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k}$$

ser vi att parametriseringen ger relationen

$$x(t)^2 + y(t)^2 + z(t)^2 = 4(\cos t)^2 + 13(\sin t)^2 + 9(\cos t)^2 = 13,$$

vilket motsvarar en sfär med centrum i origo och $r = \sqrt{13}$. Parametriseringen ger dessutom att

$$3x(t) = -2z(t)$$

vilket är ett plan. Kurvan $\mathcal{C}$ motsvarar därför den cirkel som utgör skärningen mellan sfären och planet. Notera att projektionen av cirkeln på xy-planet är en ellips!

ii. Bestäm partikelns fart efter $\pi/2$ tidsenheter. I vilken punkt i rummet befinner sig partikeln vid denna tidpunkt? (1p)

Lösning: Vi beräknar hastigheten:

$$\mathbf{v}(t) = -2\sin t\mathbf{i} + \sqrt{13}\cos t\mathbf{j} + 3\sin t\mathbf{k},$$

vilket ger farten

$$v(t) = |\mathbf{v}(t)| = \sqrt{4(\sin t)^2 + 9(\sin t)^2 + 13(\cos t)^2} = \sqrt{13}.$$

Farten är alltså konstant. Efter $\pi/2$ tidsenheter är positionsvektorn

$$\mathbf{r}(\pi/2) = 0\mathbf{i} + \sqrt{13}\mathbf{j} - 0\mathbf{k}$$

och partikeln befinner sig således i punkten

$$(0, \sqrt{13}, 0).$$

iii. Bestäm hur långt partikeln färdas mellan $t = 0$ och $t = 2\pi$. (1p)

Lösning: Kurvlängden ges av formeln

$$\ell = \int_{\mathcal{C}} ds = \int_{t_0}^{t_1} |\mathbf{v}(t)| dt$$

och i vårt fall får vi alltså

$$\ell = \int_0^{2\pi} \sqrt{13} dt = 2\sqrt{13}\pi.$$

(c) Låt $f(x, y)$ vara en funktion av två variabler där godtyckligt många kontinuerliga partiella derivator existerar, och där $x(u, v) = uv$ och $y(u, v) = u \sin v + v$. Sätt $g(u, v) = f(x(u, v), y(u, v))$ och bestäm andraderivatorna $\frac{\partial^2 g}{\partial u^2}$ och $\frac{\partial^2 g}{\partial v^2}$ uttryckt i de partiella derivatorna $f_1, f_2, f_{11}, f_{12}, f_{21}, f_{22}$ av $f(x, y)$. (3p)

Lösning:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial g}{\partial u} &= v f_1 + \sin v f_2, \\
\frac{\partial^2 g}{\partial u^2} &= v^2 f_{11} + 2v \sin v f_{12} + \sin^2 v f_{22}, \\
\frac{\partial g}{\partial v} &= u f_1 + (1 + u\cos v) f_2, \\
\frac{\partial^2 g}{\partial v^2} &= -u \sin v f_2 + u^2 f_{11} + 2u(1 + u\cos v) f_{12} + (1 + u\cos v)^2 f_{22}. \qquad (1)
\end{aligned}$$

(d) Låt $f(x,y,z) = \frac{1}{\sqrt{x^2+2y^3+4z^3}}$. Bestäm ekvationen för tangentplanet till ytan S som definieras av $f(x,y,z) = 3$ i punkten (1, 1, 1). (2p)

Lösning: Ekvationen för tangentplanet till en nivåyta $f(x,y,z) = 0$ i en punkt (a,b,c) ges av

$$f_1(a,b,c)(x-a) + f_2(a,b,c)(y-b) + f_3(a,b,c)(z-c) = 0. \tag{2}$$

Vi beräknar de partiella derivatorna

$$\begin{aligned} f_1(x,y,z) &= -\frac{x}{(x^2+2y^3+4z^3)^{3/2}} \\ f_2(x,y,z) &= -\frac{3y^2}{(x^2+2y^3+4z^3)^{3/2}} \\ f_3(x,y,z) &= -\frac{6z^2}{(x^2+2y^3+4z^3)^{3/2}}. \end{aligned} \tag{3}$$

I punkten $(1,1,1)$ tar dessa värdena:

$$f_1(1,1,1) = -\frac{1}{7\sqrt{7}}, \quad f_2(1,1,1) = -\frac{3}{7\sqrt{7}}, \quad f_3(1,1,1) = -\frac{6}{7\sqrt{7}}.$$

Ekvationen för tangentplanet blir då

$$-\frac{1}{7\sqrt{7}}(x-1) - \frac{3}{7\sqrt{7}}(y-1) - \frac{6}{7\sqrt{7}}(z-1) = 0,$$

dvs

$$x + 3y + 6z = 10.$$

Till följande uppgift skall fullständig lösning redovisas på separat skrivpapper. Motivera och förklara så väl du kan.

2. Låt $f(x,y) = 10 + x^3 + y^3 - 3xy$.

(a) Bestäm och klassificera alla extrempunkter till $f(x,y)$ på den domän D i $\mathbb{R}^2$ som begränsas av triangeln med hörn i $(0,0),(1,0),(0,1)$, dvs

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, 0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1-x\}.$$

(3p)

Lösning: Vi letar först efter kritiska punkter, dvs

$$f_1(x,y) = 3x^2 - 3y = 0, \qquad f_2(x,y) = 3y^2 - 3x = 0.$$

De enda lösningarna är

$$(0,0) \quad \text{och} \quad (1,1).$$

Endast $(0,0)$ ligger i domänen D. För att bestämma vilken sorts punkt det är beräknar vi Hessianen:

$$H(f) = \begin{pmatrix} 6x & -3 \\ -3 & 6y \end{pmatrix}.$$

I punkten $(0,0)$ får vi därför

$$\det H(f)(0,0) = \det \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ -3 & 0 \end{pmatrix} = -9 < 0.$$

Eftersom determinanten är negativ kan vi dra slutsatsen att detta är en *sadelpunkt*. Vi måste dessutom analysera om det kan finnas ytterligare kritiska punkter på randen till D. Vi börjar med linjesegmentet längs x-axeln, dvs linjen $(x,0), 0 \le x \le 1$, vilket ger

$$3x^2 = 0.$$

Detta ger alltså ingen ny kritisk punkt. Detsamma gäller linjen längs y-axeln. Vi kan parametrisera hypotenusan med linjen $y = 1-x$, och vi får därför funktionen

$$g(x) = f(x, 1-x) = 10 + x^3 + (1-x)^3 - 3(x - x^2).$$

Kritiska punkter ges då av

$$g'(x) = 3x^2 - 3(1-x)^2 - 3 + 6x = 0.$$

Efter förenkling ger detta ekvationen

$$-6 + 12x = 0$$

med lösning

$$x = 1/2.$$

Eftersom $y = 1 - x$ får vi en ny kritisk punkt i

$$(1/2, 1/2).$$

Funktionens värde i denna punkt är

$$f(1/2, 1/2) = \frac{19}{2},$$

som skall jämföras med värdet i sadelpunkten $(0, 0)$:

$$f(0, 0) = 10.$$

Vi måste även kolla hörnen på triangeln, dvs $(1, 0)$ och $(0, 1)$, där vi har

$$f(1, 0) = f(0, 1) = 11.$$

Vi drar därför slutsatsen att $(1/2, 1/2)$ är en *minpunkt* på triangeln D, medan $(1, 0)$ och $(0, 1)$ är båda maxpunkter.

(b) Bestäm Taylorpolynomet av grad 2 till $f(x, y)$ i punkten $(2, 2)$. (1p)

Lösning: Sätt $h = x - 2$ och $k = y - 2$. Taylorpolynomet blir då

$$f(h, k) = f(2, 2) + f_1(2, 2)h + f_2(2, 2)k + \frac{1}{2}\Big(h^2 f_{11}(2, 2) + 2hk f_{12}(2, 2) + k^2 f_{22}(2, 2)\Big) + \cdots$$

Om vi stoppar in funktionsvärdena får vi slutsvaret

$$f(h, k) = 14 + 6(h + k) + \tfrac{1}{2}(12h^2 - 6hk + 12k^2) + \cdots = 14 + 6(h + k) + 6h^2 - 3hk + 6k^2 + \cdots$$

(c) Bestäm riktningsderivatan av $f(x, y)$ i punkten $(2, 2)$ i riktningen $\mathbf{i} + \mathbf{j}$. (0.5p)

Lösning: Riktningsderivatan i en punkt (a, b) ges av

$$D_{\mathbf{u}} f(a, b) = \mathbf{u} \cdot \nabla f(a, b),$$

där $\mathbf{u}$ är en enhetsvektor. Eftersom $|\mathbf{i} + \mathbf{j}| = \sqrt{2}$ definierar vi

$$\mathbf{u} = \frac{\mathbf{i} + \mathbf{j}}{\sqrt{2}}$$

. Vi har då

$$\mathbf{u} \cdot \nabla f(a, b) = \frac{6}{\sqrt{2}} + \frac{6}{\sqrt{2}} = \frac{12}{\sqrt{2}} = 6\sqrt{2}.$$

Formelblad för TMA044

Trigonometri.

$$\cos(x+y) = \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y)$$

$$\sin(x+y) = \sin(x)\cos(y) + \cos(x)\sin(y)$$

$$\cos(x)\cos(y) = \frac{1}{2}(\cos(x-y) + \cos(x+y))$$

$$\sin(x)\sin(y) = \frac{1}{2}(\cos(x-y) - \cos(x+y))$$

$$\sin(x)\cos(y) = \frac{1}{2}(\sin(x-y) + \sin(x+y))$$

$$\tan(x+y) = \frac{\tan(x) + \tan(y)}{1 - \tan(x)\tan(y)}$$

Integralkatalog

$$\int x^a\,dx = \frac{x^{a+1}}{a+1} + C \quad , \quad a \neq -1$$

$$\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + C$$

$$\int \sin x\,dx = -\cos x + C$$

$$\int \cos x\,dx = \sin x + C$$

$$\int \frac{1}{\cos^2 x}\,dx = \tan x + C$$

$$\int \frac{1}{\sin^2 x}\,dx = -\cot x + C$$

$$\int e^x\,dx = e^x + C$$

$$\int a^x\,dx = \frac{a^x}{\ln a} + C \ , \ 0 < a \neq 1$$

$$\int \frac{1}{x^2+a^2}\,dx = \frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a} + C \ , \ a \neq 0$$

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \ln|f(x)| + C$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{a-x^2}}\,dx = \arcsin\frac{x}{\sqrt{a}} + C \ , \ a > 0$$

$$\int \sqrt{a-x^2}\,dx = \frac{1}{2}x\sqrt{a-x^2} + \frac{a}{2}\arcsin\frac{x}{\sqrt{a}} + C \ , \ a > 0$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+a}}\,dx = \ln|x + \sqrt{x^2+a}| + C \ , \ a \neq 0$$

$$\int \sqrt{x^2+a}\,dx = \frac{1}{2}(x\sqrt{x^2+a} + a\ln|x + \sqrt{x^2+a}|) + C$$

Maclaurinutvecklingar

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots$$

$$\sin x = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1}\frac{x^{2k-1}}{(2k-1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots$$

$$\cos x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^{k}\frac{x^{2k}}{(2k)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots$$

$$(1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} x^k = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \ldots \quad , \quad |x| < 1 \quad , \quad \binom{\alpha}{k} = \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-k+1)}{k(k-1)\ldots 1}$$

$$\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1}\frac{x^k}{k} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots \quad , \quad -1 < x \leq 1$$

$$\arctan x = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1}\frac{x^{2k-1}}{2k-1} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \ldots \quad , \quad |x| \leq 1$$

Övrigt

Masscentrum (x_T, y_T, z_T) för Ω ges av $x_T = \dfrac{\iiint_\Omega x\rho(x,y,z)\,dxdydz}{\iiint_\Omega \rho(x,y,z)\,dxdydz}$, analogt för y_T, z_T.

$\rho(x,y,z)$ är densiteten.