Tentamen
TMA044 Flervariabelanalys - Omtenta E2 (med lösningar)

2018-08-31 kl. 08.30–12.30

Examinator: Daniel Persson, Matematiska vetenskaper, Chalmers

Telefonvakt: Felix Held , telefon: anknytning 6792

Hjälpmedel: endast bifogat formelblad, ej räknedosa

För godkänt på tentan krävs antingen 25 poäng på godkäntdelens två delar sammanlagt, eller att båda delarna är godkända var för sig. För godkänt på del 1 krävs minst 10 poäng, för godkänt på del 2 krävs 13 poäng. Erhållen poäng på någon av delarna får ersätta poäng på motsvarande del på senare tentamen tills kursen ges nästa läsår. För att få slutbetyg på kursen skall också Matlabmomentet vara godkänt. För betyg 4 eller 5 krävs dessutom 33 resp. 42 poäng sammanlagt på tentamens alla delar.

Lösningar läggs ut på kursens webbsida första vardagen efter tentamensdagen. Tentan rättas och bedöms anonymt. Resultat meddelas via Ladok ca. tre veckor efter tentamenstillfället. Första granskningstillfälle meddelas på kurswebbsidan, efter detta sker granskning alla vardagar 9-13, MV:s exp.

Godkäntdelen, del 1

Uppgift 1 och 2 se sidan 4

Godkäntdelen, del 2

Uppgift 3-7 se sidan 5

Överbetygsdelen

Endast om man ligger enstaka poäng från godkänt och presterat riktigt bra på någon av följande uppgifter kan poäng på denna del räknas in för att nå godkäntgränsen. Normalt krävs för poäng på uppgift att man redovisat en fullständig lösningsgång, som i princip lett, eller åtminstone skulle kunnat leda, till målet.

8. Använd Stokes sats för att räkna ut arbetet $F(x, y, z) = (z^2, y^2, x)$ utför längs randen till triangeln med hörn i $(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)$. (6p)

Lösning: Om S är en yta med moturs orienterad rand D och normal n säger Stokes sats att $\int_D F \cdot d\mathbf{r} = \iint_S \operatorname{curl} F \cdot n dS$. En naturlig yta S i fallet ovan är den del av planet $x + y + z = 1$ som ligger i första kvadranten. I det här fallet är $\operatorname{curl} F = (0, 2z - 1, 0)$ (uträkningen utelämnas). Om vi projicerar ner ytan på xy-planet kan vi se det som en nivåyta $f = z - g(x, y)$ där $g(x, y) = 1 - x - y$ där $x + y \leq 1, x \geq 0, y \geq 0$. Enligt formel har vi $ndS = (\nabla f)dxdy = (1, 1, 1)dxdy$. Sammansättning av informationen ovan ger att arbetet ges av

$$\int_0^1 \int_0^{1-x} (2z - 1) dydx = \int_0^1 \int_0^{1-x} (2(1 - x - y) - 1) dydx = \frac{-1}{6}.$$

9. Räkna ut $\int_S (x+y)dA$ där S är det lutande parallellogrammet med hörn i

$$(0,0),(5/2,5/2),(5/2,-5/2),(5,0).$$

(6p)

Lösning: En bild visar snabbt att området begränsas av de räta linjerna $y=x, y=-x, y=-x+5, y=x-5$. Det går bland annat att räkna ut med hjälp av en variabelsubstitution $x=2u+3v, y=2u-3v$, eller genom att stycka upp området i enklare delar. Vi utför inte denna kalkyl här.

Ett enklare sätt är att använda medelvärdessatsen som gör att vi kan tolka $\iint_S xdA/\iint_S dA$ som tyngdpunkten i x-led, och på samma sätt $\iint_S ydA/\iint_S dA$ som tyngdpunkten i y-led. Av symmetriskäl ser vi att den senare är noll. Vi ser också att $\iint_S xdA/\iint_S dA = 5/2$, dvs. $\iint_S xdA = \frac{5}{2}\,\text{Area}(S)$. Arean är lätt att räkna ut, eftersom den ges av två trianglar med höjd $5/2$ och bredd 5. Arean är alltså $25/2$ och integralen i fråga är $\frac{125}{4}$.

10. Definiera begreppen gradient och riktningsderivata, samt formulera och bevisa relationen mellan dem. (6p)

Lösning: Se boken.

Formelblad för TMA044

Trigonometri.

$$\cos(x+y) = \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y)$$

$$\sin(x+y) = \sin(x)\cos(y) + \cos(x)\sin(y)$$

$$\cos(x)\cos(y) = \frac{1}{2}(\cos(x-y) + \cos(x+y))$$

$$\sin(x)\sin(y) = \frac{1}{2}(\cos(x-y) - \cos(x+y))$$

$$\sin(x)\cos(y) = \frac{1}{2}(\sin(x-y) + \sin(x+y))$$

$$\tan(x+y) = \frac{\tan(x)+\tan(y)}{1-\tan(x)\tan(y)}$$

Integralkatalog

$$\int x^a\,dx = \frac{x^{a+1}}{a+1} + C \quad , \quad a \neq -1$$

$$\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + C$$

$$\int \sin x\,dx = -\cos x + C$$

$$\int \cos x\,dx = \sin x + C$$

$$\int \frac{1}{\cos^2 x}\,dx = \tan x + C$$

$$\int \frac{1}{\sin^2 x}\,dx = -\cot x + C$$

$$\int e^x\,dx = e^x + C$$

$$\int a^x\,dx = \frac{a^x}{\ln a} + C \ , \ 0 < a \neq 1$$

$$\int \frac{1}{x^2+a^2}\,dx = \frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a} + C \ , \ a \neq 0$$

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \ln|f(x)| + C$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{a-x^2}}\,dx = \arcsin\frac{x}{\sqrt{a}} + C \ , \ a > 0$$

$$\int \sqrt{a-x^2}\,dx = \frac{1}{2}x\sqrt{a-x^2} + \frac{a}{2}\arcsin\frac{x}{\sqrt{a}} + C \ , \ a > 0$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+a}}\,dx = \ln|x+\sqrt{x^2+a}| + C \ , \ a \neq 0$$

$$\int \sqrt{x^2+a}\,dx = \frac{1}{2}(x\sqrt{x^2+a} + a\ln|x+\sqrt{x^2+a}|) + C$$

Maclaurinutvecklingar

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$$

$$\sin x = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{x^{2k-1}}{(2k-1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots$$

$$\cos x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots$$

$$(1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} x^k = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \dots \quad , \quad |x| < 1 \quad , \quad \binom{\alpha}{k} = \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-k+1)}{k(k-1)\dots 1}$$

$$\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{x^k}{k} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots \quad , \quad -1 < x \leq 1$$

$$\arctan x = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{x^{2k-1}}{2k-1} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots \quad , \quad |x| \leq 1$$

Övrigt

Masscentrum (x_T, y_T, z_T) för Ω ges av $x_T = \frac{\iiint_\Omega x\rho(x,y,z)\,dxdydz}{\iiint_\Omega \rho(x,y,z)\,dxdydz}$, analogt för y_T, z_T.

$\rho(x,y,z)$ är densiteten.

Anonym kod	**TMA044 Flervariabelanalys - Omtenta E2 (med lösningar) 2018-08-3**

Godkäntdelen: del 1

1. Till nedanstående uppgifter skall svar anges på separat skrivpapper.

(a) i) **Påstående:** Låt $f(x, y) = 0$ vara en nivåyta, och (a, b) en punkt på nivåytan. Då är $f_x(a, b)(x - a) = y - b$ ekvationen för tangentplanet i (a, b).

Ange vilket alternativ nedan som stämmer. Om du anser att påståendet ovan är fel, ange då den korrekta ekvationen.

A Sant
B Falskt (0.5p)

Svar: Nej, ekvationen ges av $\nabla f(a, b) \cdot (x - a, y - b) = 0$.

ii) **Påstående:** Om f är differentierbar så är f kontinuerlig.

Ange vilket alternativ nedan som stämmer.

A Sant
B Falskt (0.5p)

Svar: Sant

iii) Låt $f : U \to \mathbb{R}$ vara en differentierbar funktion på en domän $U \subseteq \mathbb{R}^2$.

Vilket av följande påståenden är sant?

A Jacobianen till gradienten i en punkt (a, b) är Hessianen i punkten (a, b).
B Jacobianen är en flervariabel analog till andraderivatan av f.
C Om Lf är linjäriseringen av f i en punkt (a, b) så innebär det att om $f(x, y)$ ligger nära $Lf(x, y)$ så ligger (x, y) nära (a, b). (0.5p)

Svar: A

(b) Låt $F(x, y) := e^{x^2} - \sin(xy)$. Bestäm tangentplanet till ytan i $\mathbb{R}^3$ definierad av ekvationen $F(x, y) = z$ i punkten $(0, 0, 1)$. (2p)

Lösning: Ekvationen för tangentplanet till en nivåyta i punkten $(0, 0, 1)$ ges av $\nabla F(0, 0) = z-1$. Eftersom $\nabla F = (2xe^{x^2} - y\cos(xy), -x\cos(xy))$ får vi att $\nabla F(0, 0) = (0, 0)$. Ekvationen för tangentplanet blir således $z = 1$.

(c) Låt $\mathcal{C} \subseteq \mathbb{R}^2$ vara kurvan given av $x^2 - 2x + y^2 - 6y + 6 = 0$.

i. Ange en parametrisering av kurvan. (1p)
Lösning: Efter kvadratkomplettering finner vi att kurvan ges av $(x - 1)^2 + (y - 3)^2 = 4$. En parametrisering ges således av $x = 1 + 2\cos t, y = 3 + 2\sin t, 0 \le t \le 2\pi$.

ii. Bestäm längden av $\mathcal{C}$ genom att sätta upp den relevanta integralen och räkna ut den. (2p)

Lösning: Längden till en kurva parametriserad av $\mathbf{r(t) = (x(t), y(t)), a \leq t \leq b}$ ges av $\int_a^b \sqrt{(x')^2 + (y')^2} dt$. I fallet ovan finner vi, med hjälp av trigonometriska ettan, att längden ges av

$$\int_0^{2\pi} 2dt = 4\pi.$$

Eftersom ekvationen beskriver en cirkel med radie 2 med centrum i $(1, 3)$ är svaret rimligt.

(d) Låt $F = F(s, t)$ vara en två gånger differentierbar funktion. Räkna ut $\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}$ i termer av partiella derivator av s och t där $s = x - y, t = 3x + 4y$. (3p)

Lösning: Enligt kedjeregeln har vi

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial s}\frac{\partial s}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial x} = F_s + 3F_t.$$

Om vi upprepar kedjeregeln får vi också att

$$\frac{\partial F_s}{\partial y} = \frac{\partial F_s}{\partial s}\frac{\partial s}{\partial y} + \frac{\partial F_s}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial y} = -F_{ss} + 4F_{st}$$

samt

$$\frac{\partial F_t}{\partial y} = \frac{\partial F_t}{\partial s}\frac{\partial s}{\partial y} + \frac{\partial F_t}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial y} = -F_{ts} + 4F_{tt}.$$

Sammansättning ger oss då:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = -F_{ss} + 4F_{st} - 3F_{st} + 12F_{tt} = -F_{ss} + F_{st} + 12F_{tt}.$$

Till följande uppgift skall fullständig lösning redovisas på separat skrivpapper. Motivera och förklara så väl du kan.

2. Betrakta funktionen $f(x, y, z) = xyz$ och $P = (1, 1, 1)$.

(a) Bestäm med hjälp av Lagranges metod lokala maximum och minimum under bivillkoret $x + y + z = 1, x, y, z \geq 0$. (3p)

(b) Bestäm linjäriseringen av f i punkten P, samt riktningsderivatan av f i P i riktningen $(1, 0, 0)$. (1.5p)

Lösning: (a) Enligt Lagranges metod måste vi söka kritiska punkter till $L = f - \lambda g$ där $g = x + y + z - 1$. Med andra ord söker vi lösningar till ekvationssystemet

$$yx = \lambda,$$

$$xz = \lambda,$$

$$yz = \lambda,$$

$$x + y + z = 1.$$

Om någon variabel bland x, y, z är lika med 0 ger de 3 första ekvationerna att de alla är lika med 0, vilket motsäger den sista ekvationen. Det betyder att vi kan dividera med t.ex. x om vi sätter ekvation 1 lika med ekvation 2: $xy = \lambda = xz$ så vi erhåller $y = z$. På samma sätt sluter vi oss till att $x = y = z$ och den sista ekvationen ger att $x + y + z = 3x = 1$ så ett lokalt maximum eller minimum ges av punkten

$$\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right).$$

(b): Linjäriseringen av f i en punkt (a, b, c) ges av $f(a, b, c) + \nabla f(a, b, c) \cdot (x - a, y - b, z - c)$. Eftersom $f(1, 1, 1) = 1$ och $\nabla f(1, 1, 1) = (1, 1, 1)$ får vi att linjäriseringen ges av

$$Lf = 1 + (x - 1) + (y - 1) + (z - 1) = x + y + z - 2.$$

Riktningsderivan i riktningen u ges av skalärprodukten med gradienten av f i P, dvs. grad $f(P) \cdot u$, och eftersom $u = (1, 0, 0)$ får vi att den ges av 1.

Anonym kod	**TMA044 Flervariabelanalys - Omtenta E2 (med lösningar) 2018-08-3**

Godkäntdelen: del 2

Till uppgift 3 nedan räcker det med svar (ingen motivering behövs), men för uppgift 4-7 skall fullständiga lösningar redovisas. Motivera och förklara så väl du kan. Alla lösningar anges på separat skrivpapper.

3. i) Låt $x(u,v)$ och $y(u,v)$ representera en koordinattransformation. Vilket av följande påståenden är korrekt i detta fall?

A Det nya areaelementet dA kan skrivas som $x_u y_v dudv$ där x_u och y_v anger partiella derivator.

B För polära koordinater kan vi tolka arealementet som arean på en infinitesimal cirkel med centrum i origo och radie r.

C Låt $x = u^2 v, y = uv^2$. Då är det nya areaelementet på formen $3u^2v^2 dudv$. (0.5p)

Svar: C ....

ii) Är det sant att integralen av $e^{-x^2-y^2}$ konvergerar över hela $\mathbb{R}^2$? (0.5p)

Svar: Sant. ....

iii) Låt $F(x,y) = (-y, x)$. Är det sant att F kan tolkas som hastighetsfältet för en kropp som roterar runt z-axeln? (0.5p)

Svar: Sant. ....

4. Räkna ut $\iint_D \frac{1}{x} e^{y/x} dA$ över området D som begränsas av $y = x$ och $y = x^2$. (2.5p)

Lösning: Området som begränsas av $y = x$ och $y = x^2$ har x-värden mellan $x = 0$ och $x = 1$. Om vi alltså skivar området med avseende på x får vi att integralen ges av

$$\int_0^1 \int_{x^2}^x \frac{1}{x} e^{y/x} dy dx.$$

Vi får att första integralen ges av $\int_{x^2}^x \frac{1}{x} e^{y/x} dy = \left[e^{y/x}\right]_{x^2}^x = e - e^x$. Den sista integralen är standard och ges av

$$\int_0^1 (e - e^x) dx = e - (e - 1) = 1.$$

5. (a) Låt $G(x,y) = (4x^3y^4 + y\cos(xy), 4x^4y^3 + x\cos(xy))$. Avgör om G är konservativt. (2p)

Lösning: Den vanliga metoden ger att en potential ges av $\phi = x^4y^4 + \sin(xy)$. Alternativt kan man verifiera att kriteriet för att G ska vara konserativ är uppfyllt vilket också är tillräckligt eftersom G är överallt definierad.

(b) Räkna ut arbetet G utför längs kurvan $\vec{r}(t) = (t\cos(\pi t) - 1, \sin\left(\frac{\pi t}{2}\right)), 0 \le t \le 1$. (1p)

Lösning: Kurvan har startpunkt i $P_1 = (-1, 0)$ och ändpunkt i $P_2 = (-2, 1)$. Eftersom fältet är konserativt får att det utförda arbetet ges av $\phi(P_2) - \phi(P_1) = \sin(-2) + 16$.

6. En kropp K består av ett homogent material och begränsas av xy-planet och paraboloiden $z = 1 - x^2 - y^2$. Punkten $P = (\overline{x}, \overline{y}, \overline{z})$ anger masscentrum till K. Bestäm $\overline{z}$. (3p)

Lösning: Enligt formelblad ges $\overline{z}$ av formeln

$$\iiint_K zdV / \iiint_K dV.$$

Vi behöver alltså räkna ut dessa två integraler. Om vi projicerar ner K på xy-planet ser vi att området kan integreras över enhetsdisken D, och med z-värde mellan 0 och $1 - r^2$ i cylindriska koordinater. I dessa koordinater har vi också $dV = rdrd\theta dz$. Med andra ord

$$\iiint dV = \iint_D \int_0^{1-r^2} rdzdrd\theta = \int_0^{2\pi} \int_0^1 (1 - r^2) rdrd\theta = \pi/2.$$

På samma sätt får vi:

$$\iiint zdV = \iint_D \int_0^{1-r^2} zrdzdrd\theta = \int_0^{2\pi} \int_0^1 \frac{(1 - r^2)^2}{2} rdrd\theta = \pi/6.$$

Med andra ord har vi att $\overline{z} = \frac{1}{3}$.

7. Låt $F(x, y) = (-y, x)$.

(a) Räkna ut det arbetet som F utför längs kurvan $\mathbf{r}(t) = (t^2 - t, t^3 - t), 0 \leq t \leq 1$. (3p)

(b) Använd Greens sats för att räkna ut arean till området R som $\mathbf{r}$ omsluter. (1p)

Lösning: Om $x = t^2 - t$ och $y = t^3 - t$ får vi direkt att $dx = (2t - 1)dt, dy = (3t^2 - 1)dt$. Insättning ger då att det utförda arbetet ges av

$$\int F \cdot d\mathbf{r} = \int_0^1 -(t^3 - t)(2t - 1)dt + (t^2 - t)(3t^2 - 1)dt = \int_0^1 (t^4 - 2t^3 + t^2)dt = \frac{1}{5} - \frac{2}{4} + \frac{1}{3} = \frac{1}{30}.$$

(b) Greens sats ger direkt att 2 gånger arean är lika med det utförda arbetet, helt enkelt eftersom $\int F \cdot d\mathbf{r} = \iint_R (\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y})dxdy = 2 \iint_R dA$. Alltså ges arean av 1/60 areaenheter.

8. Låt $F(x,y) = (xz, -yz, x^2 + y^2)$.

(a) Visa att F är källfritt. (1p)

(b) Beräkna flödet av F upp genom halvsfären $x^2 + y^2 + z^2 = 4, z \geq 0$. (3p)

Lösning: (a) Att ett vektorfält $F = (F_1, F_2, F_3)$ är källfritt innebär att $\operatorname{div} F = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z} = 0$. I fallet i uppgiften har vi $\operatorname{div} F = z - z + 0 = 0$.
(b) Gauss divergenssats säger att flödet ut ur en sluten yta Y ges av $\iiint_Y \operatorname{div} F dV$. Om vi betecknar Y_1 halvsfären, och med Y_2 locketsom ges av $x^2 + y^2 \geq 4, z = 0$, så bildar $Y_1 \cup Y_2$ randen till halvbollen B som ges av $x^2 + y^2 + z^2 \leq 4, z \geq 0$. Eftersom F är källfritt så får vi att flödet upp ur S_1 plus flödet ner genom S_2 blir noll. Flödet ner genom S_2, $\iint_{Y_2} F \cdot n dS$ kan vi räkna ut direkt. En normal ges av $n = (0, 0, -1)$ och det är lämpligt att introducera polära koordinater, $x = r\cos\theta, y = r\sin\theta, dS = r dr d\theta, 0 \leq r \leq 2, 0 \leq \theta \leq 2\pi$. På ytan Y_2 har vi även $F = (0, 0, r^2)$ och integralen blir således

$$\iint_{Y_2} F \cdot n dS = -\int_0^{2\pi} \int_0^2 r^3 dr d\theta = -8\pi.$$

Eftersom vi noterade att flödet ner genom Y_2 är minus flödet upp genom Y_1 får vi att svaret på från är 8π.