TMA044 Flervariabelanalys

Lösningar på övningsuppgifter

Detta dokument innehåller mina renskrivna lösningar på övningsuppgifter i kursen Flervariabelanalys (TMA044). Jag kan inte lova att samtliga lösningar är välformulerade och pedagogiska, men förhoppningsvis är de flesta lösningar hjälpsamma. /Jimmy

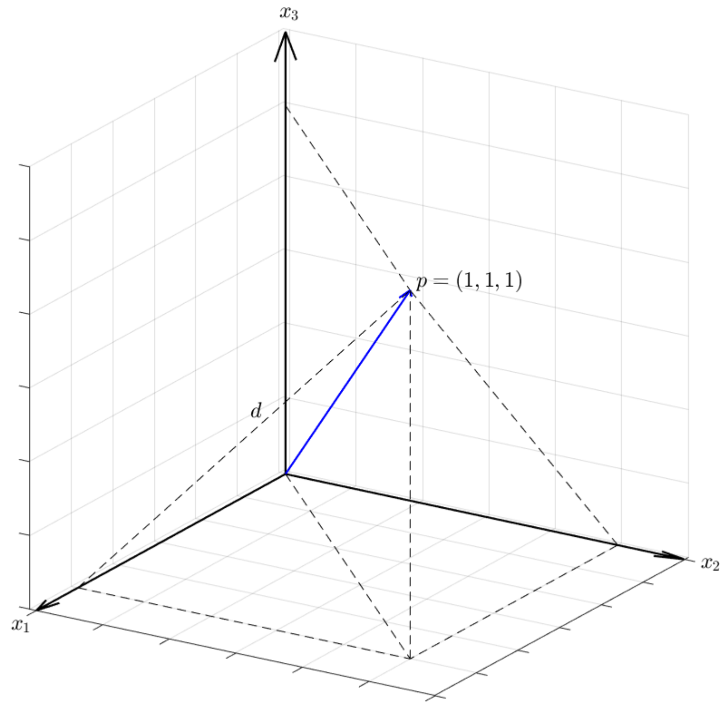
Contents

Uppgifter ur Adams & Essex

Problem 10.1.11.

Bestäm avståndet från punkten $(1, 1, \ldots, 1) \in \mathbb{R}^n$ till den närmsta punkten på x_1-axeln.

Lösning: Rita upp för $n = 3$. med punkten $p = (1, 1, 1)$.



Den närmsta punkten på x_1-axeln är $p_1 = (1, 0, 0)$, så avståndet är

$$\mathrm{d}(p, p_1) = \sqrt{(1-1)^2 + (1-0)^2 + (1-0)^2} = \sqrt{0+1+1} = \sqrt{2}.$$

Samma princip gäller i godtycklig dimension: den punkt på x_1-axeln som ligger närmast punkten $p = (1, 1, \ldots, 1)$ är $p_1 = (1, 0, \ldots, 0)$ och avståndet mellan dessa två punkter är

$$\mathrm{d}(p, p_1) = \sqrt{(1-1)^2 + (1-0)^2 + (1-0)^2 + \cdots + (1-0)^2} = \sqrt{0+1+1+\cdots+1} = \sqrt{n-1}.$$

Problem 10.1.27.

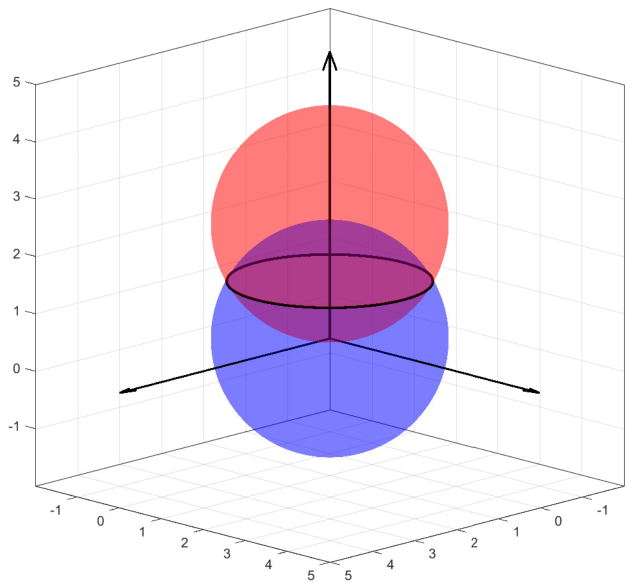
Beskriv och skissa (om möjligt) mängden av alla punkter i $\mathbb{R}^3$ som motsvarar:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 4 & (1) \\ x^2 + y^2 + z^2 = 4z & (2) \end{cases}$$

Lösning: Vi känner genast igen ekvation (1) som en sfär med radie $r = 2$ centrerad i origo. Ekvation (2) kan i sin tur skrivas om som

$$x^2 + y^2 + (z-2)^2 = 4,$$

vilket känns igen som en sfär med radien $r = 2$ centrerad i punkten $p = (0, 0, 2)$. Skärningen mellan dessa två sfärer, dvs mängden av alla punkter som uppfyller båda ekvationer, är en cirkel:



För att se exakt var cirkeln ligger kan vi subtrahera de två ekvationerna från varandra:

$$(2) - (1) = 0 \qquad \Rightarrow \qquad z = 1,$$

så cirkeln ligger i planet $z = 1$. Cirkeln beskrivs alltså med ekvationssystemet

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 4 \\ z = 1 \end{cases} \qquad \Rightarrow \qquad x^2 + y^2 = 3,$$

så cirkeln är centrerad i punkten $(0, 0, 1)$ och har radie $r = \sqrt{3}$.

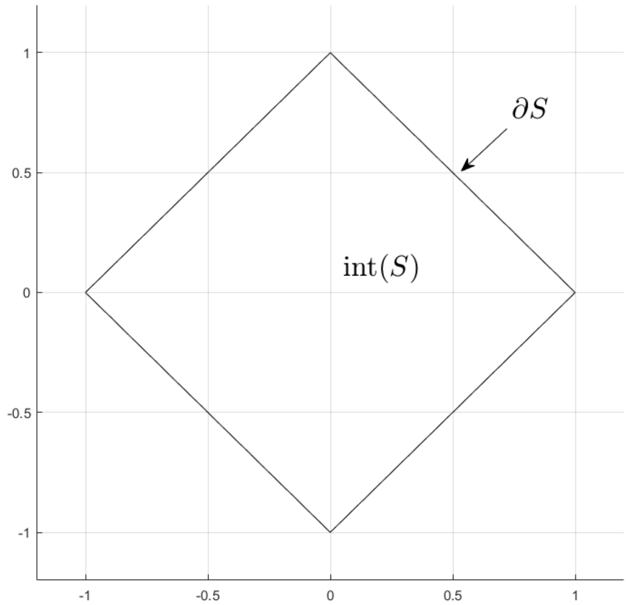
Problem 10.1.36.

Låt

$$S = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; |x| + |y| \leq 1 \right\}$$

Ange rand ∂S och interiör $\mathrm{int}(S)$ för mängden S.

Lösning: Kort sagt utgörs randen av det som ligger på kanten medan interiören är det som ligger inuti:



Ett mer rigoröst sätt att uttrycka sig vore att randen är mängden av punkter

$$\partial S = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; |x| + |y| = 1 \right\},$$

medan interiören är mängden

$$\mathrm{int}(S) = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; |x| + |y| < 1 \right\}.$$

Problem 10.4.7.

Bestäm ekvationen för planet som definieras av villkoren:

(1) Det passerar genom punkterna $P = (1, 1, 1)$ och $Q = (2, 0, 3)$.

(2) Det är vinkelrätt mot planet $x + 2y - 3z = 0$.

Lösning: Linjen mellan punkterna P och Q ges av vektorn

$$\overrightarrow{PQ} = (2-1, 0-1, 3-1) = (1, -1, 2) = \mathbf{i} - \mathbf{j} + 2\mathbf{k}.$$

Normalen $\mathbf{n}$ till det sökta planet måste vara vinkelrätt mot $\overrightarrow{PQ}$. Notera att planet dessutom måste vara vinkelrät mot planet (2), vilket innebär att normalen $\mathbf{n}$ måste vara vinkelrätt mot normalen till planet i (2), dvs

$$\tilde{\mathbf{n}} = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} - 3\mathbf{k}.$$

Vi kan därför använda kryssprodukt för att bestämma normal till det sökta planet:

$$\begin{aligned} \mathbf{n} = \overrightarrow{PQ} \times \tilde{\mathbf{n}} &= \big(\mathbf{i} - \mathbf{j} + 2\mathbf{k}\big) \times \big(\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - 3\mathbf{k}\big) = \\ &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & -3 \end{vmatrix} = -\mathbf{i} + 5\mathbf{j} + 3\mathbf{k}. \end{aligned}$$

Det sökta planet har därför ekvationen

$$-(x-1) + 5(y-1) + 3(z-1) = 0$$

vilket efter förenkling blir

$$\boxed{x - 5y - 3z = -7}$$

Problem 10.5.3.

Identifiera ytan som definieras av ekvationen

$$2x^2 + 2y^2 + 2z^2 - 4x + 8y - 12z + 27 = 0.$$

Lösning: Samla ihop alla termer med x, y, z var för sig och skriv om ekvationen som

$$2(x^2 - 2x + 1) + 2(y^2 + 4y + 4) + 2(z^2 - 6z + 9) = -27 + 2 + 8 + 18.$$

Denna ekvation kan vidare förenklas till

$$(x - 1)^2 + (y + 2)^2 + (z - 3)^2 = \frac{1}{2}$$

och beskriver därför en cirkel med radie $\frac{1}{\sqrt{2}}$, centrerad i punkten $(1, -2, 3)$.

Problem 11.3.11.

Planet
$$z = 1 + x \tag{1}$$
skär konen
$$z^2 = x^2 + y^2 \tag{2}$$
i en parabolisk kurva. Parameterisera kurvan på tre olika sätt:

(a) $t = x$

(b) $t = y$

(c) $t = z$

Lösning:

(a) Om $t = x$ så är $z = 1 + t$. Ekvation (2) implicerar därför att
$$(1+t)^2 = t^2 + y^2 \qquad \Longleftrightarrow \qquad 1 + 2t = y^2 \qquad \Rightarrow \qquad y = \pm\sqrt{1+2t}.$$
Vi behöver alltså två olika parameteriseringar av kurvan:
$$\boxed{x = t, \qquad y = \begin{cases} +\sqrt{1+2t} & \text{om } t > 0 \\ -\sqrt{1+2t} & \text{om } y < 0 \end{cases}, \qquad z = t + 1}$$

(b) Sätter vi $t = y$ så finner vi att
$$x^2 + t^2 = z^2 = (1+x)^2 = 1 + 2x + x^2$$
vilket implicerar att
$$t^2 = 1 + 2x \qquad \Rightarrow \qquad x = \frac{t^2 - 1}{2}.$$
Eftersom $z = 1 + x$ finner vi därför också att
$$z = \frac{t^2 + 1}{2}.$$
En parameterisering av kurvan ges därför av
$$\boxed{x = \frac{t^2 - 1}{2}, \qquad y = t, \qquad z = \frac{t^2 + 1}{2}}$$

(c) Om $z = t$ så är $x = z - 1 = t - 1$, och notera att
$$x^2 + y^2 = z^2 \qquad \Longleftrightarrow \qquad (t-1)^2 + y^2 = t^2 \qquad \Longleftrightarrow \qquad y^2 = 2t - 1.$$
Med andra ord är $y = \pm\sqrt{2t-1}$. En parameterisering ges då av
$$\boxed{x = t - 1, \qquad y = \begin{cases} +\sqrt{2t-1} & \text{om } y > 0 \\ -\sqrt{2t-1} & \text{om } y < 0 \end{cases}, \qquad z = t}$$

Problem 11.3.16.

Beskriv kurvan $\mathcal{C}$ som ges av

$$\begin{cases} x = a\cos t \sin t \\ y = a\sin^2 t \\ z = bt \end{cases}$$

Beräkna dess längd mellan $t = 0$ och $t = T > 0$.

Lösning: Skriv om

$$\begin{cases} x = a\cos t \sin t = \frac{a}{2}\sin 2t \\ y = a\sin^2 t = \frac{a}{2}\big(1 - \cos 2t\big) \end{cases}$$

och notera att vi nu har följande relation:

$$x^2 + \left(y - \frac{a}{2}\right)^2 = \frac{a^2}{4}.$$

Detta är en cylinder med centrum i $(0, a/2)$ längs z-axeln, så x- och y-koordinaterna rör sig i en cirkel medan z-koordinaten rör sig uppåt; kurvan är en cirkulär helix på randen av cylindern.

Längden på kurvan är

$$L = \int_0^T |v| \, \mathrm{d}t = \int_0^T \sqrt{\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\right)^2} \, \mathrm{d}t =$$

$$= \int_0^T \sqrt{a^2\cos^2 2t + a^2 \sin^2 2t + b^2} \, \mathrm{d}t = \int_0^T \sqrt{a^2 + b^2} \, \mathrm{d}t = \sqrt{a^2 + b^2}T$$

Problem 12.1.1.

Bestäm definitionsmängden till funktionen

$$f(x,y) = \frac{x+y}{x-y}$$

Lösning: Definitionsmängden, *the domain*, är mängden av alla punkter (x, y) för vilka $f(x, y)$ existerar; mängden av punkter (x, y) som vi kan mata in i funktionen och få ut ett ändligt värde. Det enda som kan gå fel när vi försöker utvärdera den här funktionen är om vi råkar dela med 0, så vi måste bara se till att $x \neq y$. Definitionsmängden är alltså

$$D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; x \neq y\right\}$$

Problem 12.1.2.

Bestäm definitionsmängden till funktionen

$$f(x, y) = \sqrt{xy}$$

Lösning: Det vi behöver akta oss för i det här fallet är om $xy < 0$, för då existerar inte roten; visst, det existerar en *komplex* rot men nu är vi intresserade av reella tal. Så länge $xy \geq 0$ existerar dock roten $\sqrt{xy}$, så definitionsmängden är

$$D = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; xy \geq 0\right\}$$

Ett alternativt sätt att skriva definitionsmängden är

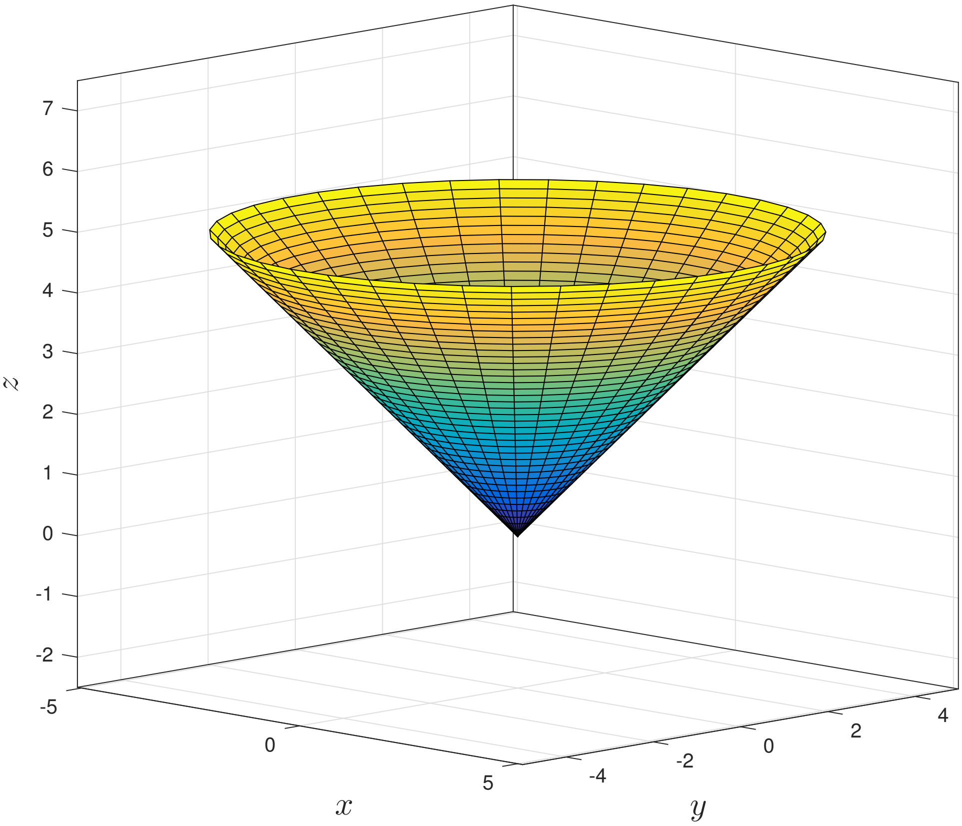
$$D = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; (x \geq 0 \text{ och } y \geq 0) \text{ eller } (x \leq 0 \text{ och } y \leq 0)\right\}$$

Problem 12.1.15.

Skissa grafen till funktionen

$$f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Lösning: Notera att funktionen i fråga ger avståndet från punkten (x, y) till origo. Annorlunda uttryckt är $f(x, y)$ lika med radien r på den cirkel kring origo som punkten (x, y) ligger på och eftersom radien ökar linjärt bildar grafen en kon.



Problem 12.1.23.

Sketcha några av nivåkurvorna till funktionen

$$f(x,y) = \frac{x-y}{x+y}.$$

Lösning: En nivåkurva är mängden av alla punkter (x,y) för vilka funktionen antar ett fixt värde c, i vårt fall

$$f(x,y) = \frac{x-y}{x+y} = c.$$

Olika värden på c ger olika nivåkurvor, och för att sketcha en nivåkurva behöver vi skriva om ovanstående uttryck på formen

$$y = g(x)$$

for någon funktion $g(x)$. I vårt fall finner vi att

$$\begin{aligned} \frac{x-y}{x+y} = c \quad &\iff \quad x-y = c(x+y) \quad \iff \quad x-y = cx+cy \quad \iff \\ &\iff \quad (1-c)x = (1+c)y \quad \iff \quad y = \frac{1-c}{1+c}x \end{aligned}$$

så nivåkurvorna är räta linjer $y = kx$ för konstanten $k = \frac{1-c}{1+c}$. Exempel:

$$\begin{aligned} c = 0 \quad &\Rightarrow \quad y = x, \\ c = 0.5 \quad &\Rightarrow \quad y = \frac{4}{5}x, \\ c = 2 \quad &\Rightarrow \quad y = -\frac{1}{3}x, \\ c = 11 \quad &\Rightarrow \quad y = -\frac{10}{12}x. \end{aligned}$$

Problem 12.2.14.

Hur kan vi definiera om funktionen

$$f(x,y) = \frac{x^3 - y^3}{x - y}, \qquad (x \neq y)$$

så att den definieras längs linjen $y = x$ och blir kontinuerlig i hela xy-planet?

Lösning: När $x \neq y$ kan vi skriva om

$$f(x,y) = \frac{x^3 - y^3}{x - y} = x^2 + xy + y^2, .$$

Det senare uttrycket har värdet $3x^2$ längs linjen $y = x$, så vi utökar definitionen av $f(x,y)$ till

$$f(x,x) = 3x^2$$

och då kommer den att vara lika med $x^2 + xy + y^2$ överallt.

Problem 12.3.2.

Finn de partiella derivatorna till funktionen

$$f(x, y) = xy + x^2$$

och utvärdera dem i punkten $(x, y) = (2, 0)$.

Lösning: När vi beräknar den partiella derivatan med avseende på, säg, x så behandlar vi alla andra variabler - i detta fall y - som konstanter. De partiella derivatorna ges därför av

$$f_1(x, y) = y + 2x, \qquad \text{och} \qquad f_2(x, y) = x + 0$$

Man kan med andra ord säga att vi låtsas som om det bara finns en variabel, att alla andra bokstäver bara är konstanter, och deriverar som om det här vore envariabelanalys.

När vi utvärderar de partiella derivatorna i punkten $(x, y) = (2, 0)$ finner vi att

$$f_1(2, 0) = 0 + 2 * 2 = 4 \qquad \text{och} \qquad f_2(2, 0) = 2 + 0 = 2.$$

Problem 12.3.4.

Finn de partiella derivatorna till funktionen

$$g(x,y,z) = \frac{xz}{y+z}$$

och utvärdera dem i punkten $(x,y,z) = (1,1,1)$.

Lösning: Precis som på förra uppgiften beräknar vi de partiella derivatorna genom att välja ut en variabel, låtsas att alla andra variabler är konstanter istället, och derivera som om vi gjorde envariabelanalys. Alltså är

$$g_1(x,y,z) = \frac{z}{y+z}$$

och

$$g_2(x,y,z) = xz * \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}(y+z)^{-1} = xz * -1 * (y+z)^{-2} * 1 = -\frac{xz}{(y+z)^2}$$

För att beräkna med den partiella derivatan med avseende på z gör vi likadant men det blir förstås ett lite bökigare uttryck eftersom det finns ett z i både täljare och nämnare, så vi behöver använda kvotregeln från envariabeln.

$$\begin{aligned} g_3(x,y,z) &= \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}xz\right)\frac{1}{y+z} + xz * \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}(y+z)^{-1}\right) = \\ &= x * \frac{1}{y+z} + xz * -\frac{1}{(y+z)^2} = \\ &= \frac{x(y+z) - xz}{(y+z)^2} = \frac{xy}{(y+2)^2} \end{aligned}$$

Sammanfattningsvis:

$$\boxed{g_1(x,y,z) = \frac{z}{y+z}, \qquad g_2(x,y,z) = -\frac{xz}{(y+z)^2}, \qquad g_3(x,y,z) = \frac{xy}{(y+z)^2}}$$

Dags att utvärdera de partiella derivatorna i punkten $(1,1,1)$, vilket är straightforward:

$$g_1(1,1,1) = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}, \qquad g_2(1,1,1) = -\frac{1*1}{(1+1)^2} = -\frac{1}{4}, \qquad g_3(1,1,1) = \frac{1*1}{(1+1)^2} = \frac{1}{4}.$$

Problem 12.3.18.

Finn ekvationerna för tangentplanet och normallinjen till $f(x,y) = ye^{-x^2}$ i punkten $(0,1)$.

Lösning: Tangentplanet till en funktion $f(x,y)$ i punkten (a,b) är

$$z = f(a,b) + f_1(a,b)(x-a) + f_2(a,b)(y-b)$$

så vi börjar med att beräkna de partiella derivatorna:

$$f_1(x,y) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} ye^{-x^2} = y * -2x * e^{-x^2} = -2xye^{-x^2}, \qquad \text{och} \qquad f_2(x,y) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y} ye^{-x^2} = e^{-x^2}.$$

Låt oss nu utvärdera funktionen och de partiella derivatorna i punkten $(0,1)$.

$$\begin{cases} f(0,1) = 1 * e^{-0^2} = e^0 = 1, \\ f_1(0,1) = -2 * 0 * 1 * e^0 = 0, \\ f_2(0,1) = e^0 = 1 \end{cases}$$

Tangentplanet ges alltså av ekvationen

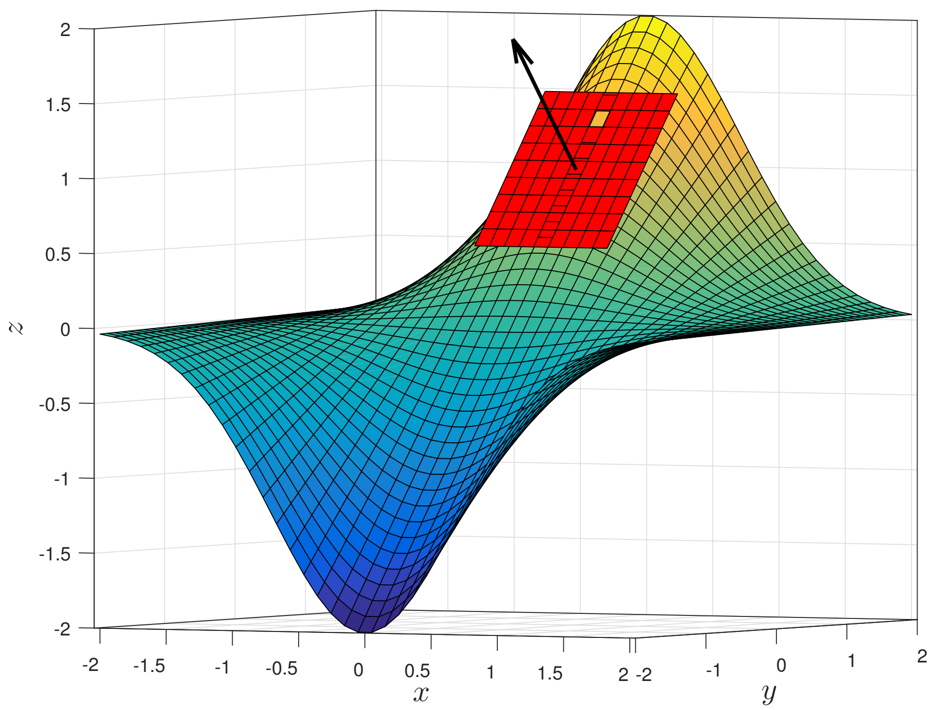
$$z = f(0,1) + f_1(0,1)(x-0) + f_2(0,1(y-1) = 1 + 0 * x + 1 * (y-1) = y.$$

Alltså $z = y$. Normalvektorn i en punkt (a,b) ges i sin tur av uttrycket

$$\mathbf{n} = f_1(a,b)\mathbf{i} + f_2(a,b)\mathbf{j} - \mathbf{k},$$

vilket i vårt fall blir

$$\mathbf{n} = 0 * \mathbf{i} + 1 * \mathbf{j} - \mathbf{k} = \mathbf{j} - \mathbf{k}.$$



Problem 12.3.29.

Visa att funktionen
$$\omega(x,y,z) = \frac{1}{x^2+y^2+z^2}$$
uppfyller ekvationen
$$x\frac{\partial\omega}{\partial x} + y\frac{\partial\omega}{\partial y} + z\frac{\partial\omega}{\partial z} = -2\omega.$$

Lösning: Beräkna de partiella derivatorna.
$$\frac{\partial\omega}{\partial x} = \frac{-2x}{(x^2+y^2+z^2)^2}$$
$$\frac{\partial\omega}{\partial y} = \frac{-2y}{(x^2+y^2+z^2)^2}$$
$$\frac{\partial\omega}{\partial z} = \frac{-2z}{(x^2+y^2+z^2)^2}$$

Det följer att
$$x\frac{\partial\omega}{\partial x} + y\frac{\partial\omega}{\partial y} + z\frac{\partial\omega}{\partial z} = \frac{-2x^2-2y^2-2z^2}{(x^2+y^2+z^2)^2} = -2\frac{x^2+y^2+z^2}{(x^2+y^2+z^2)^2} = -2\omega(x,y,z),$$

vilket skulle visas.

Problem 12.4.4.

Beräkna de partiella andraderivatorna till funktionen

$$z = \sqrt{3x^2 + y^2}$$

Lösning: Låt oss börja med att beräkna de partiella förstaderivatorna:

$$\begin{cases} \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(3x^2+y^2\right)^{1/2} = \frac{1}{2}\left(3x^2+y^2\right)^{-1/2} * 6x = \frac{3x}{\sqrt{3x^2+y^2}} \\ \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(3x^2+y^2\right)^{1/2} = \frac{1}{2}\left(3x^2+y^2\right)^{-1/2} * 2y = \frac{y}{\sqrt{3x^2+y^2}} \end{cases}$$

De partiella andraderivatorna fås genom att derivera de här uttrycken igen. Till exempel är

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\frac{3x}{\sqrt{3x^2+y^2}} = \frac{3}{\sqrt{3x^2+y^2}} - \frac{9x^2}{(3x^2+y^2)^{3/2}} = \frac{3y^2}{(3x^2+y^2)^{3/2}},$$

och

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\frac{y}{\sqrt{3x^2+y^2}} = \frac{1}{\sqrt{3x^2+y^2}} - \frac{y^2}{(3x^2+y^2)^{3/2}} = \frac{3x^2}{(3x^2+y^2)^{3/2}}.$$

Theorem 1 i Kapitel 12.4 säger att de två blandderivatorna $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ och $\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$ kommer vara lika med varandra, att det inte spelar någon roll i vilken ordning vi deriverar. Låt oss testa detta genom att beräkna båda blandderivatorna var för sig.

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\frac{y}{\sqrt{3x^2+y^2}} = y * \frac{\partial}{\partial x}\left(3x^2+y^2\right)^{-1/2} = \\ &= y * -\frac{1}{2}\left(3x^2+y^2\right)^{-3/2} * 6x = -\frac{3xy}{(3x^2+y^2)^{3/2}}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} &= \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\frac{3x}{\sqrt{3x^2+y^2}} = 3x * \frac{\partial}{\partial y}\left(3x^2+y^2\right)^{-1/2} = \\ &= 3x * -\frac{1}{2}\left(3x^2+y^2)\right)^{-3/2} * 2y = -\frac{3xy}{(3x^2+y^2)^{3/2}} \end{aligned}$$

Som vi ser är de två blandderivatorna lika med varandra, i enlighet med Theorem 1.

Problem 12.5.6.

Använd två olika metoder för att beräkna $\frac{\partial u}{\partial t}$ om

$$u = \sqrt{x^2 + y^2}, \qquad x = e^{st}, \qquad y = 1 + s^2 \cos t.$$

Lösning: Vi börjar med att tillämpa kedjeregeln:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t} = \frac{1}{2}\frac{2x}{\sqrt{x^2+y^2}}se^{st} - \frac{1}{2}\frac{2y}{\sqrt{x^2+y^2}}s^2 \sin t = \frac{xse^{st} - ys^2 \sin t}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

Om vi stoppar in $x(t) = e^{st}$ och $y(t) = 1 + s^2 \cos t$ finner vi att

$$u = \sqrt{(e^{st})^2 + (1 + s^2 \sin t)^2} = \sqrt{e^{2st} + 1 + 2s^2 \cos t + s^4 \cos(t)^2}, \tag{3}$$

så det slutgiltiga uttrycket för $\frac{\partial u}{\partial t}$ blir det aningen bökiga

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{se^{2st} - (1 + s^2 \cos t)s^2 \sin t}{\sqrt{e^{2st} + 1 + 2s^2 \cos t + s^4 \cos(t)^2}} = \frac{se^{2st} - s^2 \sin t - s^4 \cos t \sin t}{\sqrt{e^{2st} + 1 + 2s^2 \cos t + s^4 \cos(t)^2}}.$$

Ett annat sätt att beräkna derivatan är skriva om variablerna x och y som funktioner av t redan innan vi börjar derivera, dvs att vi deriverar uttrycket i ekvation (3) med avseende på t.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial t}\sqrt{e^{2st} + 1 + 2s^2 \cos t + s^4 \cos(t)^2} = \\
&= \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{e^{2st} + 1 + 2s^2 \cos t + s^4 \cos(t)^2}} * \left(2se^{2st} + 0 - 2s^2 \sin t - 2s^4 \cos t \sin t\right) = \\
&= \frac{se^{2st} - s^2 \sin t - s^4 \cos t \sin t}{\sqrt{e^{2st} + 1 + 2s^2 \cos t + s^4 \cos(t)^2}}
\end{aligned}$$

Som väntat gav båda våra approacher precis samma resultat.

Problem 12.5.9.

Finn de partiella förstaderivatorna till $f(2x, 3y)$, givet att funktionen $f(x, y)$ har kontinuerliga partiella förstaderivator.

Lösning: Gör variabelsubstitutionen

$$\begin{cases} u = 2x \\ v = 3y \end{cases},$$

så att $f(2x, 3y) = f(u, v)$. Kedjeregeln ger att

$$\frac{\partial f(2x, 3y)}{\partial x} = \frac{\partial f(u, v)}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f(u, v)}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} = f_1(u, v) * 2 + f_2(u, v) * 0 = 2f_1(2x, 3y)$$

och

$$\frac{\partial f(2x, 3y)}{\partial y} = \frac{\partial f(u, v)}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial f(u, v)}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y} = f_1(u, v) * 0 + f_2(u, v) * 3 = 3f_2(2x, 3y)$$

Variablerna u och v behövdes bara för att hjälpa oss tillämpa kedjeregeln, så vi kan göra oss av med dem nu när beräkningen är över. Sammanfattningsvis:

$$\frac{\partial f(2x, 3y)}{\partial x} = 2f_1(2x, 3y), \qquad \frac{\partial f(2x, 3y)}{\partial y} = 3f_2(2x, 3y).$$

Problem 12.5.15.

Definiera $z = f(x, y)$ där $x = 2s + 3t$ och $y = 3s - 2t$.

(a) Beräkna
$$\frac{\partial^2 z}{\partial s^2}.$$

(b) Beräkna
$$\frac{\partial^2 z}{\partial s \partial t}.$$

(c) Beräkna
$$\frac{\partial^2 z}{\partial t^2}.$$

Lösning:

(a) Enligt kedjeregeln är
$$\frac{\partial z}{\partial s} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s} = 2f_1 + 3f_2, \tag{4}$$
där vi har definierat
$$f_1 = \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} \qquad \text{och} \qquad f_2 = \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}.$$
En till tillämpning av kedjeregeln ger därför att
$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 z}{\partial s^2} &= 2\frac{\partial f_1}{\partial s} + 3\frac{\partial f_2}{\partial s} = 2\left(\frac{\partial f_1}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial f_1}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s}\right) + 3\left(\frac{\partial f_2}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial f_2}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s}\right) = \\ &= 2\left(2f_{11} + 3f_{12}\right) + 3\left(2f_{21} + 3f_{22}\right) = 4f_{11} + 12f_{12} + 9f_{22}.\end{aligned}$$

(b) Låt oss utnyttja att vi redan har beräknat $\frac{\partial z}{\partial s}$ i ekvation (3). Deriverar vi detta uttryck med avseende på t så får vi
$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 z}{\partial s}\partial t &= 2\frac{\partial f_1}{\partial t} + 3\frac{\partial f_2}{\partial t} = 2\left(\frac{\partial f_1}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial f_1}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t}\right) + 3\left(\frac{\partial f_2}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial f_2}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t}\right) = \\ &= 2\left(3f_{11} - 2f_{12}\right) + 3\left(3f_{21} - 2f_{22}\right) = 6f_{11} + 5f_{12} - 6f_{22}.\end{aligned}$$

(c) Övningsuppgift för läsaren.

Problem 12.6.5.

Linjärisera och approximera funktionen

$$f(x, y, z) = \sqrt{x + 2y + 3z}$$

i punkten $(1.9, 1.8, 1.1)$.

Lösning: Beräkna derivatorna

$$f_1 = \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{x + 2y + 3z}}, \qquad f_2 = \frac{1}{2}\frac{2}{\sqrt{x + 2y + 3z}}, \qquad f_3 = \frac{1}{2}\frac{3}{\sqrt{x + 2y + 3z}}$$

Kom ihåg att en approximation till $f(x, y, z)$ ges av linjäriseringen $L(a, b, c)$ i en punkt (a, b, c) nära (x, y, z).

$$f(x, y, z) \approx L(a, b, c) = f(a, b, c) + f_1(a, b, c)(x - a) + f_2(a, b, c)(y - b) + f_3(a, b, c)(z - c)$$

Eftersom vi vill använda linjäriseringen för att approximera värdet på funktionen $f(x, y, z)$ i punkten $(x, y, z) = (1.9, 1.8, 1.1)$ så väljer vi en närliggande punkt (a, b, c) som gör linjäriseringen lätt att utvärdera. Ett bra alternativ är $(a, b, c) = (2, 2, 1)$. Avståndet mellan dess punkter är

$$|(2, 2, 1) - (1.9, 1.8, 1.1)| = \sqrt{0.1^2 + 0.2^2 + 0.1^2} \ll 1$$

Det följer att

$$\begin{aligned} f(1.9, 1.8, 1.1) \approx L(2, 2, 1) &= f(2, 2, 1) - 0.1f_1(2, 2, 1) - 0.2f_2(2, 2, 1) + 0.1f_3(2, 2, 1) = \\ &= 3 - 0.1 * \frac{1}{6} - 0.2 * \frac{1}{3} + 0.1 * 2 \approx 2.967 \end{aligned}$$

En numerisk beräkning visar att $f(1.8, 1.9, 1.1) \approx 2.96648$ så vår approximation är bra.

Problem 12.6.21.

Visa att om $f(x, y)$ är differentierbar i en punkt (a, b) så är $f(x, y)$ också kontinuerlig i (a, b).

Bevis: Kom ihåg definitionen av differentierbarhet:

$$\lim_{(k,h)\to(0,0)} \frac{f(a+h, b+k) - f(a, b) - hf_1(a, b) - kf_2(a, b)}{\sqrt{h^2 + k^2}} = 0.$$

För att gränsen skall existera måste täljaren gå mot 0, eftersom $\sqrt{h^2 + k^2} \to 0$ när $(h, k) \to (0, 0)$. De två sista termerna i täljaren, $hf_1(a, b)$ och $kf_2(a, b)$, går båda två mot 0, så gränsen kan bara existera om den första delen av täljaren också går mot 0. Med andra ord gäller att

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \Big[f(a+h, b+k) - f(a, b) \Big] = 0,$$

vilket är ekvivalent med

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} f(a+h, b+k) = f(a, b).$$

Vi känner här igen definitionen på att $f(x, y)$ är kontinuerlig i (a, b).

Problem 12.7.1.

Betrakta funktionen $f(x, y) = x^2 - y^2$ i punkten $(a, b) = (2, -1)$.

(a) Finn gradienten till funktionen i den givna punkten.

(b) Bestäm tangentplanet till funktionen $f(x, y)$ i den givna punkten.

(c) Beräkna den nivåkurva $f(x, y) = c$ som går igenom punkten $(2, -1)$ och finn tangent*linjen* till den (endimensionella) nivåkurvan.

Lösning:

(a) Gradienten är den vektor som innehåller alla partiella förstaderivator till funktionen:

$$\nabla f(x, y) = f_1(x, y)\mathbf{i} + f_2(x, y)\mathbf{j} = (f_1(x, y), f_2(x, y)).$$

Detta är inte en utmanande funktion att derivera, så låt oss helt enkelt skriva ut svaret:

$$\nabla f(x, y) = 2x\mathbf{i} - 2y\mathbf{j} = (2x, -2y),$$

vilket i punkten $(2, -1)$ blir

$$\nabla f(2, -1) = 4\mathbf{i} + 2\mathbf{j} = (4, 2).$$

(b) Vi vet sedan tidigare att tangentplanet i en punkt (a, b) ges av ekvationen

$$z = f(a, b) + f_1(a, b)(x - a) + f_2(a, b)(y - b) = f(a, b) + \nabla f(a, b) \cdot (x - a, y - b),$$

så låt oss utvärdera funktionen och derivatorna i den givna punkten $(a, b) = (2, -1)$:

$$\begin{cases} f(2, -1) = 3 \\ f_1(2, -1) = 4 \\ f_2(2, -1) = 2 \end{cases}$$

Tangentplanet ges alltså av ekvationen

$$z = 3 + 4(x - 2) + 2(y + 1) \qquad \Longleftrightarrow \qquad 4x + 2y - z = 3$$

(c) Som vi såg längre upp är $f(2, -1) = 3$, så vi är intresserade av tangentlinjen till nivåkurvan

$$x^2 - y^2 = 3$$

i den givna punkten $(2, -1)$. Vi såg även att tangentplanet till hela funktionsytan i den givna punkten $(2, -1)$ ges av ekvationen

$$4x + 2y - z = 3.$$

Nivåkurvan $f(x, y) = 3$ definieras genom att begränsa oss till ett enda z-värde, $z = 3$, och kasta bort alla andra z-värden. Eftersom tangentplanet tangerar hela funktionsytan i punkten $(2, -1)$ så måste vi kunna sätta $z = 3$ i tangentplanet och få en linje som tangerar nivåkurvan i samma punkt. Vi får alltså tangentlinjen till nivåkurvan genom att sätta $z = 3$ i ekvationen för tangentplanet:

$$4x + 2y - 3 = 3 \qquad \Longleftrightarrow 4x + 2y = 6 \qquad \Longleftrightarrow \qquad 2x + y = 3$$

Detta argument kan kännas abstrakt, men om man tänker efter en stund och försöker visualisera det hela så borde det klarna något. Föreställ er funktionsytan och tangentplanet plottade i samma graf och tänk er att ni suddar ut allting förutom det som ligger på det horisontella planet $z = 3$. Om tangentplanet tangerade hela ytan i punkten (a, b) så måste den linje som återstår av tangentplanet, efter att ni har tagit bort alla andra z-värden än $z = 3$, också tangera den del av funktionsytan som återstår - det vill säga nivåkurvan.

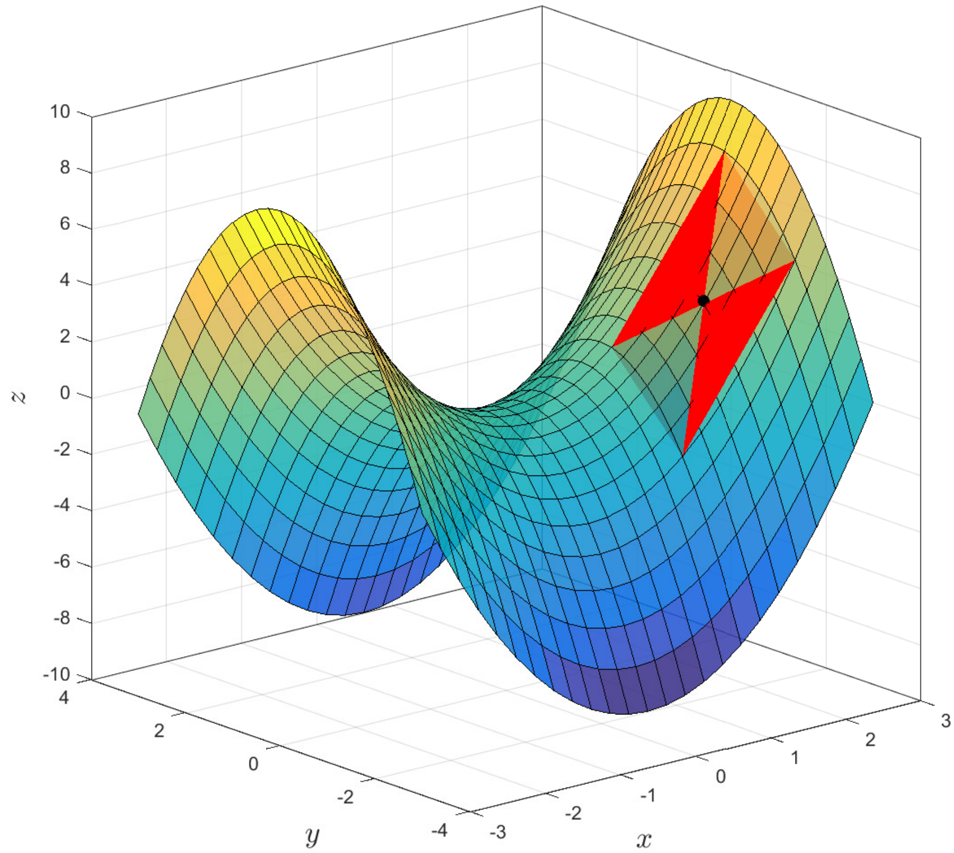


Figure 1: Det röda tangentplanet tangerar ytan $z = x^2 - y^2$ i punkten $(x, y, z) = (2, -1, 3)$.

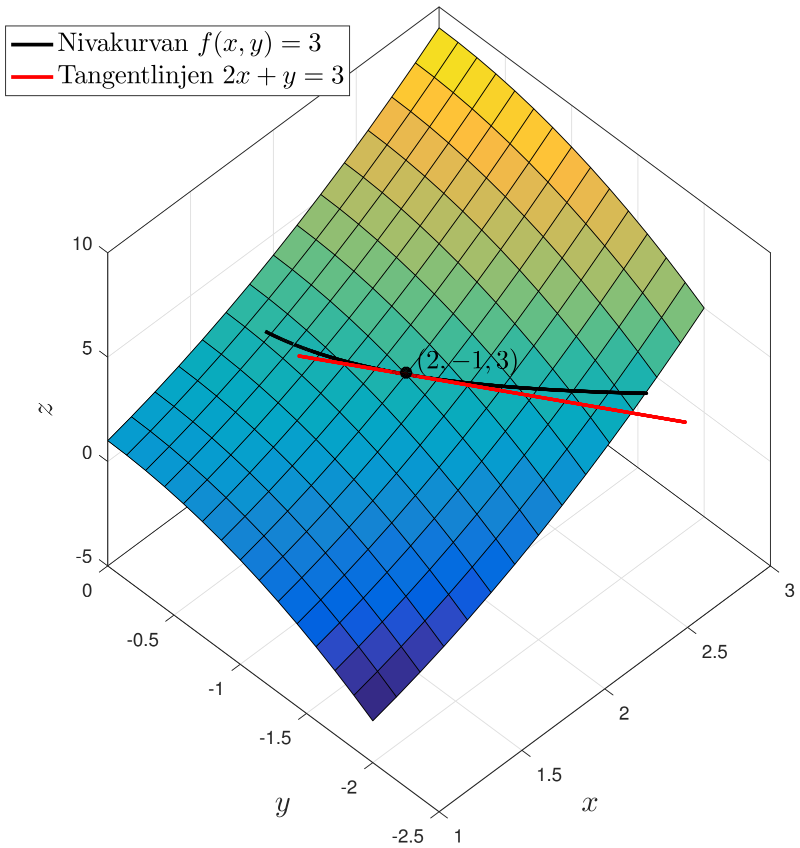


Figure 2: Den röda tangentlinjen tangerar nivåkurvan $x^2 - y^2 = 3$ i punkten $(x, y, z) = (2, -1, 3)$.

Problem 12.9.7.

Beräkna Taylorpolynomet av

$$f(x,y) = \frac{1}{2+x-2y}$$

runt punkten $(a,b) = (2,1)$.

Lösning: De första termerna i Taylorpolynomet runt punkten $(2,1)$ ges av

$$\begin{aligned} f(x,y) &= f(2,1) + f_1(2,1)(x-2) + f_2(2,1)(y-b) + \\ &= \frac{1}{2}\Big[f_{11}(2,1)(x-2)^2 + 2f_{12}(2,1)(x-2)(y-1) + f_{22}(2,1)(y-b)^2\Big] + \cdots , \end{aligned}$$

så låt oss börja derivera. Den partiella derivatan med avseende på x ges av

$$f_1(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}(2+x-2y)^{-1} = -1 * (2+x-2y)^{-2} * 1 = -\frac{1}{(2+x-2y)^2}$$

och på samma sätt finner vi den partiella derivatan med avseende på y:

$$f_2(x,y) = \frac{2}{(2+x-2y)^2}$$

Andraderivatorna ges av precis likadana beräkningar som förstaderivatorna:

$$f_{11}(x,y) = \frac{2}{(2+x-2y)^3}, \qquad f_{12}(x,y) = -\frac{4}{(2+x-2y)^3}, \qquad f_{22}(x,y) = \frac{8}{(2+x-2y)^3},$$

och vi kan nu utvärdera alla dessa funktioner i punkten $(2,1)$:

$$\begin{aligned} f(2,1) &= \frac{1}{2}, & f_1(2,1) &= -\frac{1}{4}, & f_2(2,1) &= \frac{1}{2}, \\ f_{11}(2,1) &= \frac{1}{4}, & f_{12}(2,1) &= -\frac{1}{2}, & f_{22}(2,1) &= 1. \end{aligned}$$

Taylorpolynomet runt punkten $(2,1)$ blir därför

$$\begin{aligned} f(x,y) &= \frac{1}{2} - \frac{1}{4}(x-2) + \frac{1}{2}(y-1) + \frac{1}{8}(x-2)^2 - 2(x-2)(y-1) + \frac{1}{2}(y-1)^2 + \cdots = \\ &= \frac{1}{8}\left(x^2 + 10x + 4y^2 + 28y - 16xy - 20\right) + \cdots \end{aligned}$$

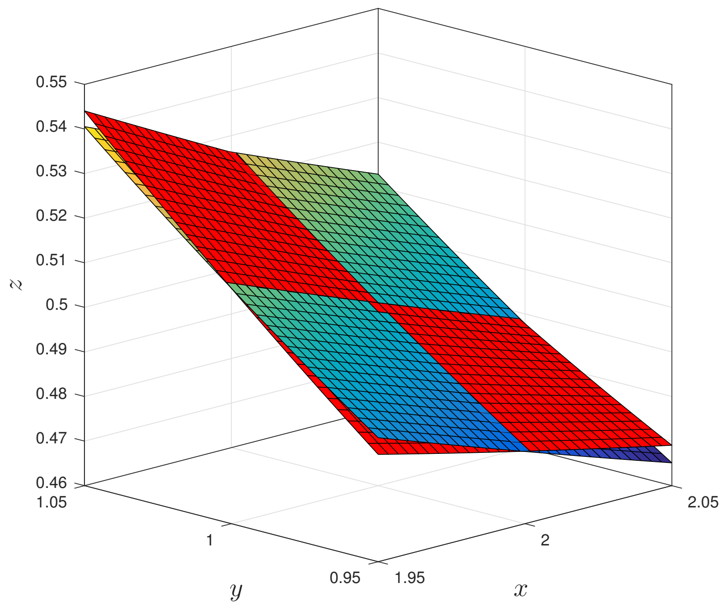


Figure 3: En jämförelse mellan den exakta funktionsytan (blågrön) och Taylorpolynomet (röd), för $1.95 \leq x \leq 2.05$ och $0.95 \leq y \leq 1.05$. Taylorpolynomet approximerar ytan väl eftersom vi tittar på punkter nära $(2, 1)$.

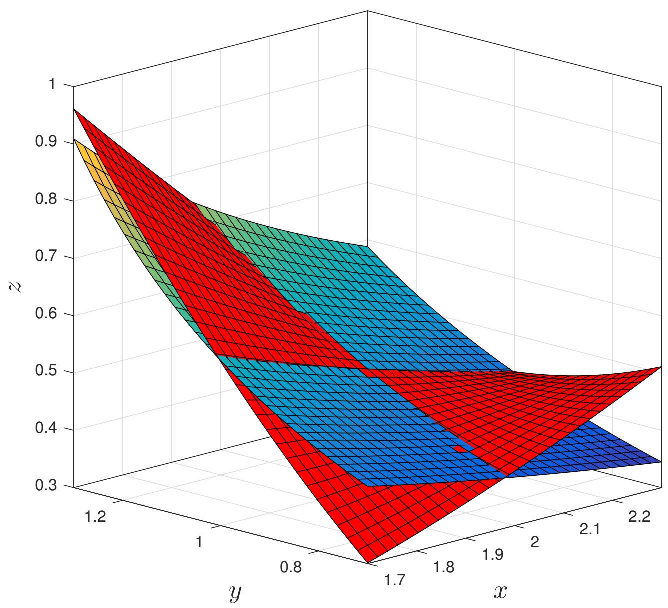


Figure 4: En jämförelse mellan den exakta funktionsytan (blågrön) och Taylorpolynomet (röd), för $1.7 \leq x \leq 2.3$ och $0.7 \leq y \leq 1.3$. Approximationen är mycket dålig för många punkter långt bort från $(2, 1)$. Approximationen hade varit bättre om vi hade tagit med fler termer av det oändligt långa Taylorpolynoomet.

Problem 12.9.13.

Visa att ekvationen

$$x \sin y = y + \sin x,$$

för x nära $x = 0$, har en lösning $y = f(x)$ som uppfyller $f(0) = 0$. Beräkna Taylorpolynomet av lösningen $f(x)$ upp till de tre första nollskilda termerna.

Lösning: Skriv om ekvationen som

$$F(x, y) = 0$$

där $F(x, y) = x \sin y - y - \sin x$. Notera först att $F(0, 0) = 0$ och att

$$F_2(x, y) = \frac{\partial F}{\partial y} = x \cos y - 1$$

har värdet $F_2(0, 0) = -1$. Implicita funktionssatsen, det vill säga Sats 8 i kapitel 12.8, ger då att ekvationen har en lösning $y = f(x)$ med $f(0) = 0$.

Vi kan inte beräkna $f(x)$ exakt men vi kan hitta de första Taylorkoeffcienterna. Vi ansätter

$$y = f(x) = a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 + \cdots \qquad (a_0 = 0)$$

och pluggar in detta i Taylorutvecklingen för sin y:

$$\sin y = y - \frac{y^3}{6} + \frac{y^5}{120} + \cdots ,$$

vilket ger ett bökigt uttryck på formen

$$\begin{aligned} \sin y = &\Big[a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 + \cdots\Big] - \\ &- \frac{1}{6}\Big[a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 + \cdots\Big]^3 + \cdots \end{aligned}$$

Det här uttrycket kan vi mata in i den ursprungliga ekvationen

$$x \sin y = y + \sin x$$

för att få en ekvation i termer av x:

$$\begin{aligned} &x\Big[a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 + \cdots\Big] - \frac{x}{6}\Big[a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 + \cdots\Big]^3 + \cdots = \\ =&\Big[a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 + \cdots\Big] + \Big[x - \frac{1}{6} x^3 + \cdots\Big] \end{aligned}$$

Jämför nu koeffcienterna av samma potenser av x på båda sidor om ekvationen:

$$x : 0 = a_1 + 1, \qquad x^2 : a_1 = a_2, \qquad x^3 : a_2 = a_3 - \frac{1}{6}, \qquad \cdots$$

Detta säger oss att

$$\begin{cases} a_1 = -1 \\ a_2 = -1 \\ a_3 = -\frac{5}{6} \\ \vdots \end{cases}$$

så Taylorutvecklingen av $f(x)$ är

$$\boxed{f(x) = -x - x^2 - \frac{5}{6} x^3 + \cdots}$$

Problem 13.1.3.

Bestäm och klassificera kritiska punkter till

$$f(x,y) = x^3 + y^3 - 3xy$$

Lösning: Om (a,b) är en kritisk punkt så försvinner gradienten:

$$\nabla f(a,b) = (f_1(a,b), f_2(a,b)) = 0.$$

I vårt fall är

$$f_1(x,y) = 3x^2 - 3y \qquad \text{och} \qquad f_2(x,y) = 3y^2 - 3x$$

så för att (x,y) ska kunna vara en kritisk punkt måste den uppfylla de två ekvationerna

$$\begin{cases} 3x^2 - 3y = 0 & \iff & x^2 = y \\ 3y^2 - 3x = 0 & \iff & y^2 = x \end{cases}$$

vilket implicerar att

$$(x^2)^2 = y^2 = x \qquad \Rightarrow \qquad x^4 - x = 0.$$

Ett sätt att lösa denna ekvation är att separera den som

$$x^4 - x = x(x^3 - 1) = x(x-1)(x^2 + x + 1) = 0$$

Den sista faktorn är strikt positiv för alla x och kan aldrig vara lika med 0, så de enda nollställena till den här funktionen fås då antingen den första faktorn eller den andra faktorn är lika med 0. Med andra ord är nollställena

$$x = 0 \qquad \text{och} \qquad x = 1.$$

Vi vet att $y = x^2$ i de kritiska punkterna, så de två kritiska punkterna är

$$(0,0) \qquad \text{och} \qquad (1,1).$$

Det återstår nu att klassificera de kritiska punkterna, vilket kräver att vi tittar på Hessianen; matrisen bestående av alla partiella andraderivator. Hessianen är lika med

$$H(x,y) = \begin{bmatrix} f_{11}(x,y) & f_{12}(x,y) \\ f_{21}(x,y) & f_{22}(x,y) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6x & -3 \\ -3 & 6y \end{bmatrix}$$

vilket i den kritiska punkten $(0,0)$ blir

$$H(0,0) = \begin{bmatrix} 0 & -3 \\ -3 & 0 \end{bmatrix}$$

Theorem 3 i Kapitel 13.1 säger att om (a,b) är en kritisk punkt och

(a) Om $H(a,b)$ är positivt definit så är (a,b) ett lokalt minima,

(b) Om $H(a,b)$ är negativt definit så är (a,b) ett lokalt maxima,

(c) Om $H(a,b)$ är indefinit så är (a,b) en sadelpunkt, och

(d) Om $H(a,b)$ är varken positivt definit, negativt definit eller indefinit så ger det här testet ingen information. Punkten (a,b) kan fortfarande vara, säg, ett lokalt maximum men vi vet helt enkelt inte.

På sidan efter detta teorem finns även en Remark som omformulerar teoremet i termer av determinanter:

(a) Om $\det H(a, b) > 0$ och $f_{11}(a, b) > 0$ så är (a, b) ett lokalt minima,

(b) Om $\det H(a, b) > 0$ och $f_{11}(a, b) < 0$ så är (a, b) ett lokalt maxima,

(c) Om $\det H(a, b) < 0$ så är (a, b) en sadelpunkt, och

(d) Om $\det H(a, b) = 0$ så ger det här testet ingen information.

I vårt fall har Hessianen $H(0, 0)$ determinanten $0*0-(-3)*(-3) = -9$. så detta är en sadelpunkt. Hessianen för den andra kritiska punkten $(1, 1)$ är

$$H(1,1) = \begin{bmatrix} 6 & -3 \\ -3 & 6 \end{bmatrix}$$

som har determinant $6 * 6 - (-3) * (-3) = 27 > 0$, så punkten $(1, 1)$ är en lokal minimipunkt.

Problem 13.2.1.

Hitta max och min av funktionen

$$f(x,y) = x - x^2 + y^2$$

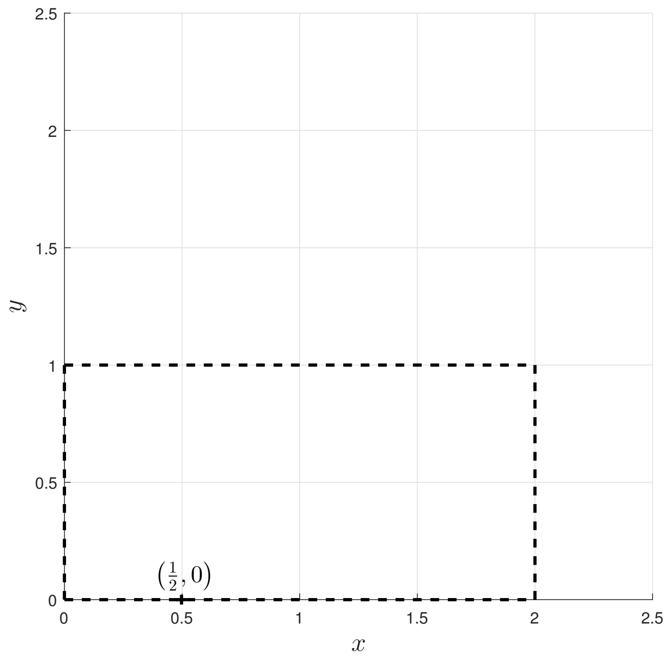
på rektangeln

$$R = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; 0 \le x \le 2 \text{ och } 0 \le y \le 1 \right\}$$

Lösning: Vi börjar med att leta upp de kritiska punkterna där gradienten försvinner:

$$\begin{cases} f_1(x,y) &= & 1-2x &= & 0 \\ f_2(x,y) &= & 2y &= & 0 \end{cases}$$

vilket har den enda lösningen $(x,y) = (1/2, 0)$. Denna punkt ligger på randen av triangeln:



Randen består av fyra stycken segment - låt oss undersöka dem separat.

(1) Det första segmentet utgörs av linjen där $x = 0$, vilket implicerar att funktionen har värdet

$$f(x,y) = f(0,y) = y^2.$$

Detta är en strikt ökande funktion på intervallet $0 \le y \le 1$, så vi slår fast att

$$\begin{cases} f(0,0) &= & 0 & \text{(min)} \\ f(0,1) &= & 1 & \text{(max)} \end{cases}$$

(2) Låt oss nu titta på det segment som utgörs av linjen $x = 2$. Där är

$$f(x,y) = f(2,y) = y^2 - 2$$

Återigen har vi en strikt ökande funktion, så min- och max-värdena finnes i hörnpunkterna:

$$\begin{cases} f(2,0) & = & -2 & \text{(min)} \\ f(2,1) & = & -1 & \text{(max)} \end{cases}$$

(3) Nu tittar vi istället på det lodräta segmentet $y = 0$, där

$$f(x, y) = f(x, 0) = x - x^2 =: g(x)$$

Vi har infört funktionen $g(x) = x - x^2$ för att betona att det här är ett problem i en variabel och att vi därför kan använda kunskap från envariabelanalysen. Hur hittar vi min- och maxvärdena till en funktion i en variabel över ett inverall? Undersök ändpunkterna på intervallet samt de punkter där derivatan försvinner. Derivatan ges av

$$f_1(x, 0) = 1 - 2x$$

vilket alltså innebär att funktionen har den enda extrempunkten $x = 1/2$. Indeed, vi tittar just nu på segmentet $y = 0$ så detta är den punkt $(x, y) = (1/2, 0)$ som vi redan har hittat. Vi har alltså tre kandidater för min- och maxpunkterna, nämligen de två hörnpunkterna samt extrempunkten, och vi finner att

$$g(1/2) = 1/4, \qquad g(0) = 0, \qquad g(2) = -2,$$

vilket innebär att

$$\begin{cases} f(2,0) & = & g(2) & = & -2 & \text{(min)} \\ f(1/2,0) & = & g(1/2) & = & 1/4 & \text{(max)} \end{cases}$$

(4) Det sista segmentet är det lodräta segmentet $y = 1$, där

$$f(x, y) = f(x, 1) = x - x^2 + 1$$

Återigen har vi en extrempunkt för $x = 1/2$, så låt oss titta på funktionsvärdena för denna punkt och för de två ändpunkterna:

$$f(1/2, 1) = 5/4, \qquad f(0, 1) = 1, \qquad f(2, 1) = -1$$

vilket innebär att vi här har min- och max-värdena

$$\begin{cases} 4f(2,1) & = & -1 & \text{(min)} \\ f(1/2,1) & = & 5/4 & \text{(max)} \end{cases}$$

Slutsats: På rektangeln R har vi

$$\begin{cases} \text{min:} & f(2,0) & = & -2 \\ \text{max:} & f(1/2,1) & = & 5/4 \end{cases}$$

Problem 13.3.4.

Finn maximum och minimum av funktionen

$$f(x, y, z) = x + y - z$$

över sfären

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1$$

Lösning: Låt oss lösa problemet med hjälp av Lagranges multiplikatormetod, eller *Lagrange multipliers* som det heter på engelska. Denna metod bygger på Theorem 4 i sektion 13.3, som säger att om (x_0, y_0) är en extrempunkt tilll funktionen $f(x, y)$ under bivillkoret $g(x, y) = 0$, så existerar ett λ_0 sådant att (x_0, y_0, λ_0) är en kritisk punkt till *Lagrangianen*

$$L(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda g(x, y).$$

Det finns även ett par andra kriterier som måste vara uppfyllda för att teoremet ska gälla, men kriterierna är ganska snälla - jag rekommenderar er att läsa teoremet och försöka förstå beviset. Det som gör teoremet så bra är att det låter oss hitta extrempunkten (x_0, y_0) genom att leta efter kritiska punkter till Lagrangianen.

Teoremet fungerar även i tre dimensioner och är därför tillämpbar på vår funktion $f(x, y, z)$. Bivillkoret kan uttryckas som

$$g(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0,$$

och vår Lagrangian blir därför

$$L(x, y, z, \lambda) = f(x, y, z) + \lambda g(x, y, z) = x + y - z + \lambda x^2 + \lambda y^2 + \lambda z^2 - \lambda.$$

Låt oss nu beräkna Lagrangianens gradient, så att vi kan söka efter kritiska punkter:

$$\frac{\partial L}{\partial x} = 1 + 2\lambda x, \qquad \frac{\partial L}{\partial y} = 1 + 2\lambda y$$

$$\frac{\partial L}{\partial z} = -1 + 2\lambda z, \qquad \frac{\partial L}{\partial \lambda} = x^2 + y^2 + z^2 - 1 = g(x, y, z)$$

Nästa steg är alltså att leta efter punkter (x, y, z, λ) där alla dessa fyra derivator försvinner. Notera att derivatan med avseende på λ är precis funktionen $g(x, y, z)$, så den derivatan försvinner om och endast om bivillkoret $g(x, y, z) = 0$ är uppfyllt.

Den första derivatan kan skrivas om som

$$\frac{\partial L}{\partial x} = 1 + 2\lambda x = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad 2\lambda x = -1 \qquad \Longleftrightarrow \qquad x = -\frac{1}{2\lambda},$$

och vi gör motsvarande omskrivning för y och z. Gradienten försvinner således för

$$x = -\frac{1}{2\lambda}, \qquad y = -\frac{1}{2\lambda}, \qquad z = +\frac{1}{2\lambda},$$

och det enda som återstår är att hitta passande λ. Här kommer bivillkoret in, för vi kan stoppa in ovanstående uttryck för x, y, z i bivillkoret och få ett kriterium som λ måste uppfylla:

$$1 = x^2 + y^2 + z^2 = \left(-\frac{1}{2\lambda}\right)^2 + \left(-\frac{1}{2\lambda}\right)^2 + \left(+\frac{1}{2\lambda}\right)^2 = \frac{3}{4\lambda^2},$$

vilket implicerar att

$$\lambda = \pm\sqrt{\frac{4}{3}}$$

Matar vi in dessa värden på λ i uttrycken för x, y, z så får vi de två extrempunkterna

$$(x, y, z) = \frac{1}{\sqrt{3}}(+1, +1, -1) \qquad \text{och} \qquad (x, y, z) = \frac{1}{\sqrt{3}}(-1, -1, +1).$$

Funktionens maximum och minimum, givet bivillkoret, är alltså

$$f\left(+\frac{1}{\sqrt{3}}, +\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \sqrt{3} \qquad \text{respektive} \qquad f\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, +\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = -\sqrt{3}.$$

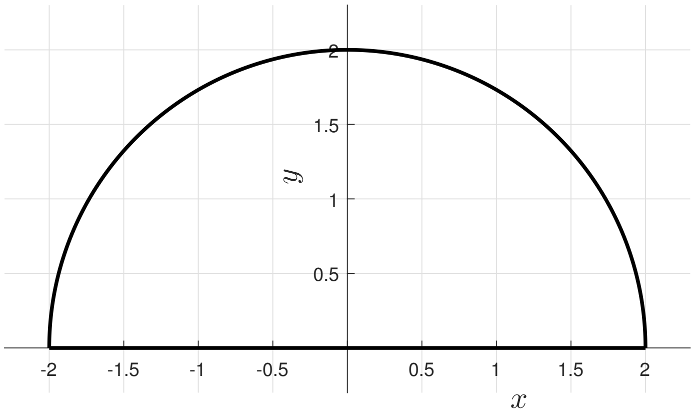
Problem 14.1.14.

Utvärdera genom inspektion dubbelintegralen

$$\iint_D (x+3)\ \mathrm{d}A$$

över den halva disken

$$D = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \ \middle|\ 0 \leq y \leq \sqrt{4-x^2} \right\}$$



Lösning: Vi börjar med att dela upp integralen i två delar:

$$\iint_D (x+3)\ \mathrm{d}A = \iint_D x\ \mathrm{d}A + \iint_D 3\ \mathrm{d}A,$$

och noterar att den andra termen är 3 gånger arean av regionen som vi integrerar över:

$$\iint_D 3\ \mathrm{d}A = 3 * \iint_D 1\ \mathrm{d}A = 3 * \mathrm{area}(D) = 3 * \frac{\pi r^2}{2} = 3 * \frac{\pi 4}{2} = 6\pi.$$

Vad som kan vara lite svårare att se är att den första termen i integralen försvinner:

$$\iint_D x\ \mathrm{d}A = 0.$$

Anledningen varför integralen försvinnner är att halvdisken är symmetrisk kring y-axeln, vilket innebär att vi för varje punkt (x, y) med positiv x-koordinat har en likadan punkt $(-x, y)$ med negativ x-koordinat. Integranden x har alltså positivt tecken när vi befinner oss på den högra halvan av disken och negativt tecken när vi befinner oss på vänstra halvan av disken, och bidragen från dessa två halvor tar ut varandra. Sammanfattningsvis är alltså

$$\iint_D (x+3)\ \mathrm{d}A = 6\pi.$$

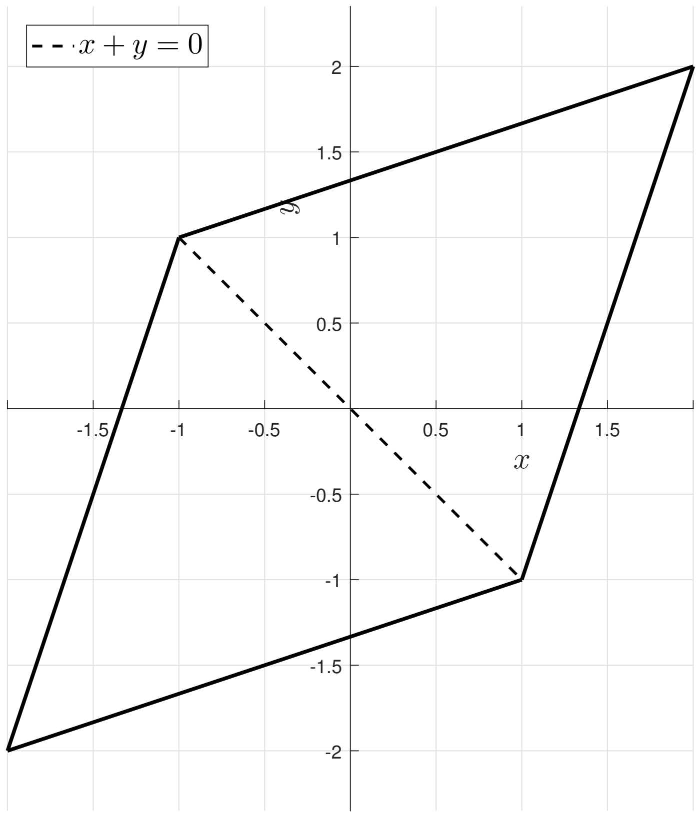
Problem 14.1.15.

Utvärdera genom inspektion dubbelintegralen

$$\iint_T (x+y)\,\mathrm{d}A$$

över parallellogrammet

$$T = \{\text{parallellogram med hörn i punkterna } (2,2),(1,-1),(-2,-2),(-1,1)\}$$



Lösning: Nyckeln till den här uppgiften är att linjen $x + y = 0$ skär parallelltrapetsen mitt itu, vilket innebär att $x + y > 0$ snett ovanför linjen och $x + y < 0$ snett nedanför linjen. Bidragen från dessa två delar tar ut varandra, så

$$\iint_T x+y\,\mathrm{d}A = 0.$$

Problem 14.2.2.

Beräkna den itererade integralen

$$\int_0^1 \left(\int_0^x (xy + y^2) \, \mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x$$

Lösning: Integralen

$$f(x) = \int_0^x (xy + y^2) \, \mathrm{d}y$$

kan beräknas för varje fixt värde på x, det vill säga genom att se x som en konstant. Precis som vi gör när vi beräknar partiella derivator. I det här fallet blir

$$\int_0^x (xy + y^2) \, \mathrm{d}y = \left[\frac{xy^2}{2} + \frac{y^3}{3} \right]_{y=0}^{y=x} = \left(\frac{x^3}{2} + \frac{x^3}{3} \right) - \left(\frac{x * 0^2}{2} + \frac{0^3}{3} \right) = \frac{x^3}{2} + \frac{x^3}{3} = \frac{5}{6} x^3.$$

Den itererade integralen blir därför

$$\int_0^1 \left(\int_0^x (xy + y^2) \, \mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{5}{6} x^3 \, \mathrm{d}x = \frac{5}{6} \left[\frac{x^4}{4} \right]_{x=0}^{x=1} = \frac{5}{6} \left(\frac{1}{4} - \frac{0}{4} \right) = \frac{5}{24}.$$

Problem 14.2.18.

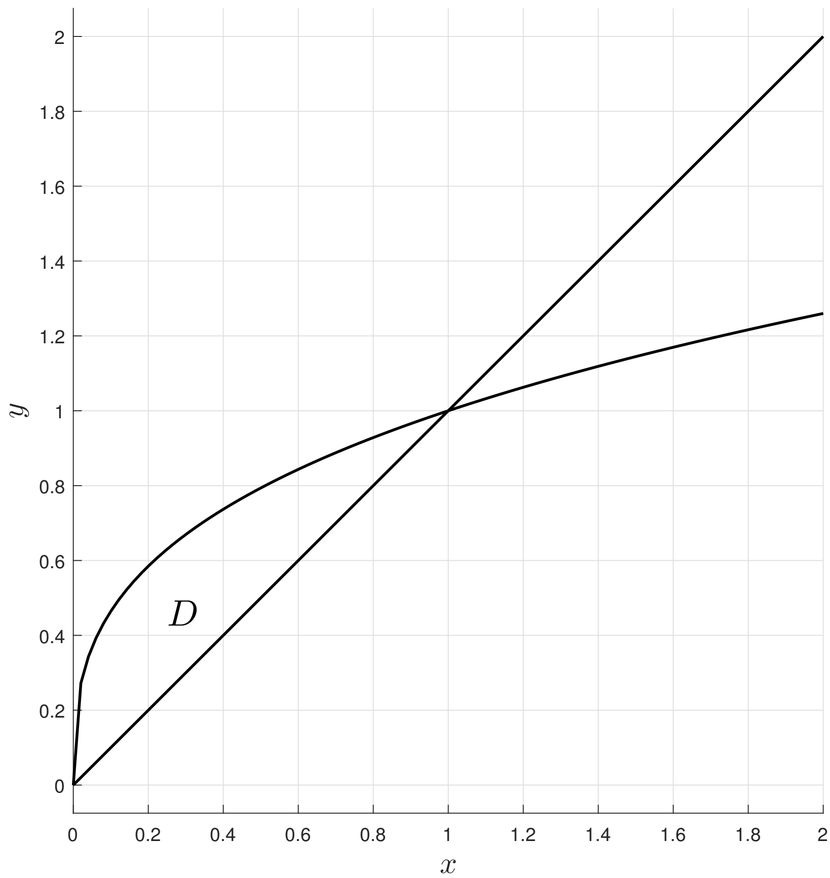
Sketcha integrationsdomänen och beräkna

$$I = \int_0^1 \mathrm{d}x \int_x^{x^{1/3}} \sqrt{1-y^4}\ \mathrm{d}y.$$

Lösning: Integrationsdomämen mängden av punkter som ligger över den räta linjen $y = x$ och under kurvan $y = x^{1/3}$, för $0 \le x \le 1$. Annorlunda uttryckt,

$$D = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; 0 \le x \le 1, x \le y \le x^{1/3}\right\}$$

Notera att kurvorna möts i startpunkten $(0, 0)$ och slutpunkten $(1, 1)$, så D innesluts av kurvorna.



Den här integralen går att beräkna genom att *börja* med integrationen med avseende på x. Då skriver vi istället om y som en funktion av x:

$$D = \left\{(x, y) \;\middle|\; 0 \le y \le 1, y^3 \le x \le y\right\}$$

och vi finner, eftersom integranden inte beror på x,

$$
\begin{aligned}
I &= \int_0^1 \mathrm{d}y \int_{y^3}^{y} \sqrt{1-y^4}\mathrm{d}x = \int_0^1 \sqrt{1-y^4}\Big[x\Big]_{x=y^3}^{x=y} \mathrm{d}y = \\
&= \int_0^1 \sqrt{1-y^4}(y-y^3)\ \mathrm{d}y = \underbrace{\int_0^1 y\sqrt{1-y^4}\ \mathrm{d}y}_{u=y^2,\ \mathrm{d}u=2y\mathrm{d}y} - \underbrace{\int_0^1 y^3\sqrt{1-y^4}\ \mathrm{d}y}_{v=1-y^4,\ \mathrm{d}v=-4y^3\mathrm{d}y} = \\
&= \frac{1}{2}\int_0^1 \sqrt{1-u^2}\ \mathrm{d}u + \frac{1}{4}\int_1^0 \sqrt{v}\ \mathrm{d}v =: I_1 + I_2
\end{aligned}
$$

Låt oss beräkna de två integralerna var för sig. Om vi byter ut integrationsvariabeln u mot x så kan den första integralen skrivas

$$
I_1 = \frac{1}{2}\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\ \mathrm{d}x.
$$

Integranden $y = \sqrt{1-x^2}$ beskriver randen till cirkeln

$$
x^2 + y^2 = 1,
$$

och vi befinner oss i första kvadranten eftersom vi bara tar i åtanke den ickenegativa roten (dvs de ickenegativa y-värdena) och $0 \leq x \leq 1$. Eftersom integralen ger oss arean under kurvan, innebär detta att vår integral är lika med arean hos en fjärdedels cirkel med radien 1, multiplicerat med den faktor $\frac{1}{2}$ som står framför integralen. Alltså:

$$
I_1 = \frac{1}{2} * \frac{\pi r^2}{4} = \big[r=1\big] = \frac{\pi}{8}.
$$

Den andra integralen går lätt att räkna:

$$
I_2 = \frac{1}{4}\int_1^0 \sqrt{x}\ \mathrm{d}x = \frac{1}{6}\Big[x^{3/2}\Big]_1^0 = 0 - \frac{1}{6} = -\frac{1}{6}
$$

så det följer att

$$
I = I_1 + I_2 = \frac{\pi}{8} - \frac{1}{6}.
$$

Problem 14.2.20.

Finn volymen av regionen som ligger under $z = 1 - x^2 - y^2$ och över $x \geq 0$, $y \geq 0$, $x + y \leq 1$.

Lösning: I envariabelanalysen lärde vi oss att en integral

$$\int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x$$

ger oss arean mellan x-axeln och grafen till $f(x)$, i intervallet $[a, b]$.

$*bild*$

På precis samma sätt ger dubbelintegralen

$$\iint_D f(x,y)\ \mathrm{d}A$$

oss volymen mellan xy-planet och funktionsytan $z = f(x, y)$, över regionen D.

$*bild*$

Med andra ord finner vi volymen av regionen genom att beräkna integralen

$$V = \iint_D 1 - x^2 - y^2\ \mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

över ytan

$$D = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \ \middle|\ x \geq 0,\ y \geq 0,\ x + y \leq 1 \right\}.$$

För varje x i intervallet $0 \leq x \leq 1$ gäller att $0 \leq y \leq 1 - x$, så dubbelintegralen kan skrivas om som den itererade enkelintegralen

$$\begin{aligned}
V = \iint_D 1 - x^2 - y^2\ \mathrm{d}A &= \int_0^1 \left(\int_0^{1-x} 1 - x^2 - y^2\ \mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x = \\
&= \int_0^1 \left[y - yx^2 - \frac{y^3}{3} \right]_{y=0}^{y=1-x} \mathrm{d}x = \\
&= \int_0^1 \left((1-x) - (1-x)x^2 - \frac{(1-x)^3}{3} \right) \mathrm{d}x = \\
&= \int_0^1 \frac{2}{3}x^3 - 2x + \frac{4}{3}\ \mathrm{d}x = \left[\frac{1}{6}x^4 - x^2 + \frac{4}{3}x \right]_0^1 = \frac{1}{6} - 1 + \frac{4}{3} = \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

Problem 14.5.7.

Beräkna trippelintegralen

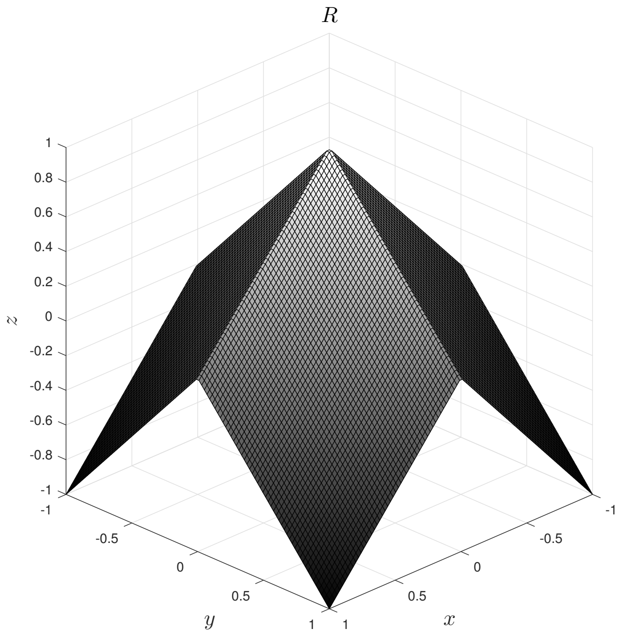
$$I = \iiint_R xy + z^2 \, \mathrm{d}V$$

över mängden

$$R = \{(x, y, z) \mid 0 \leq z \leq 1 - |x| - |y|\}$$

Håll utkik efter förenklingar.

Lösning: Mängden R består av fyra stycken likadana regioner, en för varje kvadrant, och eftersom $z \geq 0$ blir den totala domämen R en pyramid.



Dela nu upp integralen i två termer:

$$I = \iiint_R xy + z^2 \, \mathrm{d}V = \iiint_R xy \, \mathrm{d}V + \iiint_R z^2 \, \mathrm{d}V = I_1 + I_2.$$

I den första integralen I_1 noterar vi att integranden xy är positiv i två kvadranter och negativ i två kvadranter, samt att R är symmetrisk kring x- och y-axeln. Tillsammans ger dessa egenskaper att

$$\iint_R xy \, \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = 0.$$

Symmetrin hos domänen R innebär även att den andra integralen I_2 har samma värde över varje kvadrant, så det räcker att vi beräknar integralen över *en* kvadrant och multiplicerar med 4. Låt oss välja den första kvadranten R_1 av R, där $x \geq 0$ och $y \geq 0$, vilket ger den övre gränsen

$$z = 1 - x - y \qquad \Longleftrightarrow \qquad x + y + z = 1,$$

Om man vill hitta en godtycklig punkt i den första kvadranten av mängden R så kan man alltså följa den här proceduren:

Steg 1. välj en z-koordinat som uppfyller $0 \leq z \leq 1$,

Steg 2. välj en y-koordinat som uppfyller $0 \leq y \leq 1 - z$, och

Steg 3. välj en x-koordinat som uppfyller $0 \leq x \leq 1 - z - y$.

Det är på detta vis som vi tar fram integrationsgränserna när vi gör om trippelintegralen till en itererad enkelintegral:

$$I_2 = \iiint_R z^2 \, \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = 4 \iiint_{R_1} z^2 \, \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = 4 \int_0^1 \int_0^{1-z} \int_0^{1-z-y} z^2 \, \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

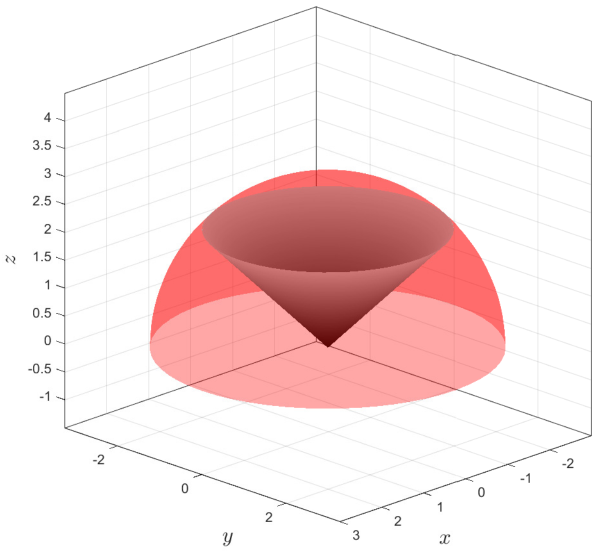
Integranden beror varken på x eller y så vi kan skriva om integralen som

$$\begin{aligned}
I_2 &= 4 \int_0^1 z^2 \left(\int_0^{1-z} \int_0^{1-z-y} 1 \, \mathrm{d}x\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}z = \\
&= 4 \int_0^1 z^2 \left(\int_0^{1-z} 1 - z - y \, \mathrm{d}y \right) \mathrm{d}z = \\
&= 4 \int_0^1 z^2 \left[y - yz - \frac{1}{2} y^2 \right]_{y=0}^{y=1-z} \mathrm{d}z = \\
&= 4 \int_0^1 \frac{1}{2} z^4 - z^3 + \frac{1}{2} z^2 \, \mathrm{d}z = \\
&= 4 \left[\frac{1}{10} z^5 - \frac{1}{4} z^4 + \frac{1}{6} z^3 \right]_0^1 = 4 \left(\frac{1}{10} - \frac{1}{4} + \frac{1}{6} \right) = \frac{1}{15}.
\end{aligned}$$

Problem 14.6.1.

Beräkna volymen av regionen som begränsas av konen $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ och sfären $x^2+y^2+z^2 = a^2$.

Lösning:



Uppgiften är alltså att beräkna integralen

$$V = \iiint_R 1 \; \mathrm{d}V,$$

över den region R som ligger ovanför/inuti konen och fortfarande innanför sfären. Det enklaste sättet att lösa den här uppgiften är att gå över till sfäriska koordinater:

$$\begin{cases} x = r\cos\theta\sin\phi \\ y = r\sin\theta\sin\phi \\ z = r\cos\phi \end{cases} , \quad \begin{array}{l} 0 \leq r \leq a \\ 0 \leq \theta \leq 2\pi \\ 0 \leq \phi \leq \pi \end{array}$$

vilket ger volymelementet

$$\mathrm{d}V = r^2 \sin\phi \; \mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\phi$$

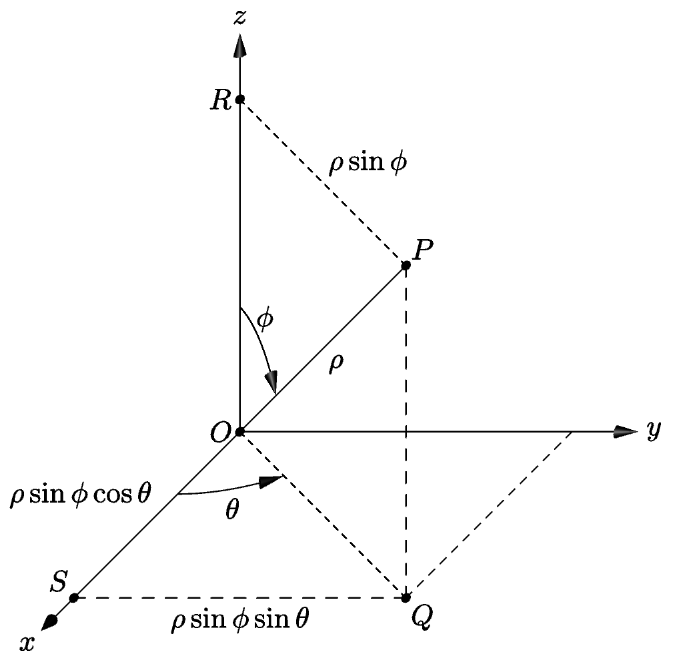


Figure 5: Illustration av sfäriska koordinater. Idén bakom sfäriska koordinater är att man kan se sfären som en samling av oändligt många horisontella cirklar, en cirkel för varje z-koordinat, och använda polära koordinater för att beskriva x- och y-koordinaterna på varje cirkel. För varje värde på vinkeln ϕ får vi en z-koordinat $z = r\cos\phi$ samt radien $r\sin\phi$ hos motsvarande cirkel, vilket ger de polära koordinaterna $x = r\sin\phi\cos\theta$ och $y = r\sin\phi\sin\theta$. (bildkälla)

Ett sätt att beräkna volymen hos en boll är via följande procedur:

Steg 1. Dra en linje från origo till en godtycklig punkt på bollens yta och räkna ut linjens längd genom att integrera med avseende på r (längden kommer förstås vara bollens radie).

Steg 2. Låt linjen rotera ett varv runt z-axeln och beräkna arean av den kon som bildas, genom att integrera med avseende på den horisontella vinkeln θ.

Steg 3. Konens tjocklek och höjd bestäms av den vertikala vinkeln ϕ mellan z-axeln och linjen från **Steg 1**. Om punkten vi väljer i **Steg 1** ligger nära bollens nordpol så blir vinkeln ϕ liten och konen blir hög och smal; om punkten vi väljer ligger nära ekvatorn så blir vinkeln ϕ stor och konen blir låg och bred. Varje punkt i bollen ligger på exakt en sådan kon och varje kon kan beskrivas av vinkeln $0 \leq \phi \leq \pi$ som beskriver dess höjd och bredd, så vi kan räkna ut volymen genom att "summera" samtliga koners ytarea för varje värde på ϕ - det vill säga att integrera med avseende på ϕ. Se Figur 6.

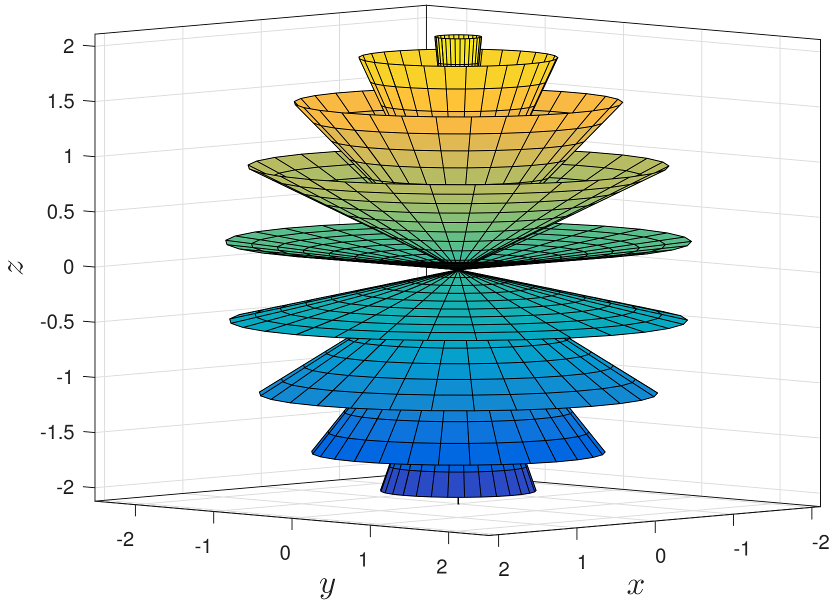


Figure 6: Sfären kan ses som en samling av koner, en för varje värde på den vertikala vinkeln ϕ.

Problemet i den här uppgiften kan lösas genom att vi, istället för att integrera över hela intervallet $0 \leq \phi \leq \pi$, bara integrerar från 0 till den vinkel ϕ som beskriver konen $z = \sqrt{x^2 + y^2}$. Vi kan hitta denna vinkel genom att sätta $x = 0$ och notera att konens ekvation då blir $z = |y|$; detta innebär att linjen $z = y$ ligger på konen och denna linje har lutningen $\phi = 45° = \pi/4$ radianer. Vi ska alltså integrera ϕ från 0 till $\pi/4$.

$$
\begin{aligned}
V = \iiint_R 1 \text{ d}V &= \int_0^{\pi/4} \int_0^{2\pi} \int_0^a r^2 \sin\phi \text{ d}r\text{d}\theta\text{d}\phi = \\
&= \int_0^{\pi/4} \int_0^{2\pi} \frac{a^3}{3} \sin\phi \text{ d}\theta\text{d}\phi = \\
&= \int_0^{\pi/4} \frac{2\pi a^3}{3} \sin\phi \text{ d}\phi = \\
&= \frac{2\pi a^3}{3} \Big[-\cos\phi \Big]_0^{\pi/4} = \frac{2\pi a^3}{3} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right).
\end{aligned}
$$

Problem 14.6.5.

Beräkna volymen av området R som ligger

1. ovanför xy-planet,
2. inuti konen $z = 2a - \sqrt{x^2 + y^2}$, och
3. inuti cylindern $x^2 + y^2 = 2ay$.

Lösning:

Låt oss gå över till cylindriska koordinater:

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \\ z = z \end{cases}$$

med volymelementet

$$\mathrm{d}V = r\ \mathrm{d}z\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta$$

Då kan konens ekvation skrivas om som $z = 2a - r$ och cylinderns ekvation blir

$$r^2 = 2ar\sin\theta \qquad \Rightarrow \qquad r = 2a\sin\theta.$$

Konen och cylindern har plottats i Figurerna 7-8 och som vi kan se ligger området helt i den första och den andra kvadranten. Varje punkt i området R kan därför hittas via följande process:

Steg 1. Välj $0 \leq \theta \leq \pi$, där intervallet bestämts av de två kvadranterna.

Steg 2. Välj $0 \leq r \leq 2a\sin\theta$, där den övre begränsningen bestämts av cylinderns ekvation.

Steg 3. Välj $0 \leq z \leq 2a - r$, där den övre begränsningen bestämts av konens ekvation.

Eftersom varje punkt i området R kan väljas via denna procedur så får vi volymen av området genom följande integral:

$$\begin{aligned} V = \iiint_R 1\ \mathrm{d}V &= \int_0^\pi \int_0^{2a\sin\theta} \int_0^{2a-r} r\ \mathrm{d}z\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta = \\ &= \int_0^\pi \int_0^{2a\sin\theta} (2a - r)r\ \mathrm{d}r\mathrm{d}\theta = \\ &= \int_0^\pi \left[ar^2 - \frac{1}{3}r^3\right]_{r=0}^{r=2a\sin\theta} \mathrm{d}\theta = \\ &= \int_0^\pi 4a^3\sin^2\theta - \frac{8a^3}{3}\sin^3\theta\ \mathrm{d}\theta = \\ &= 4a^3 \underbrace{\int_0^\pi \sin^2\theta\ \mathrm{d}\theta}_{\pi/2} - \frac{8a^3}{3} \underbrace{\int_0^\pi \sin^3\theta\ \mathrm{d}\theta}_{4/3} = 2\pi a^3 - \frac{32a^3}{9}. \end{aligned}$$

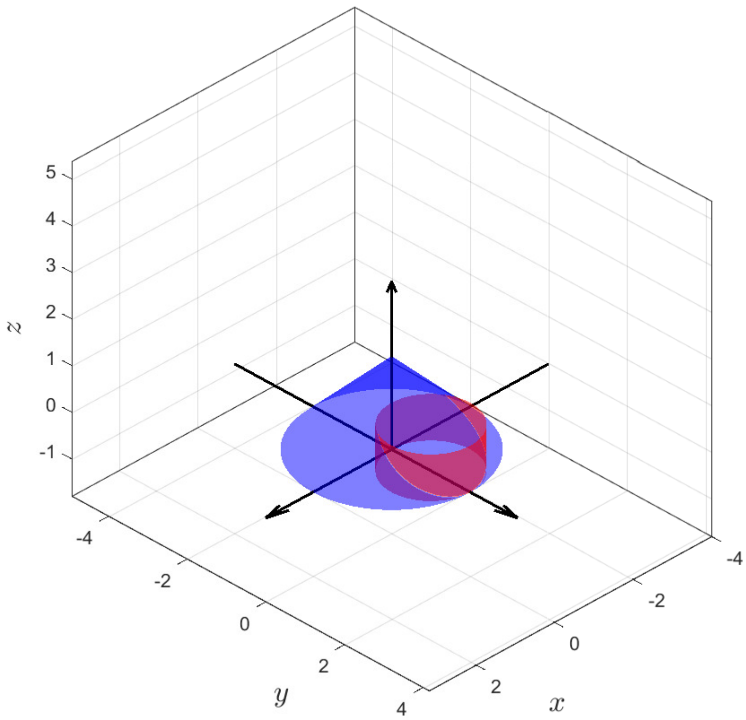


Figure 7:

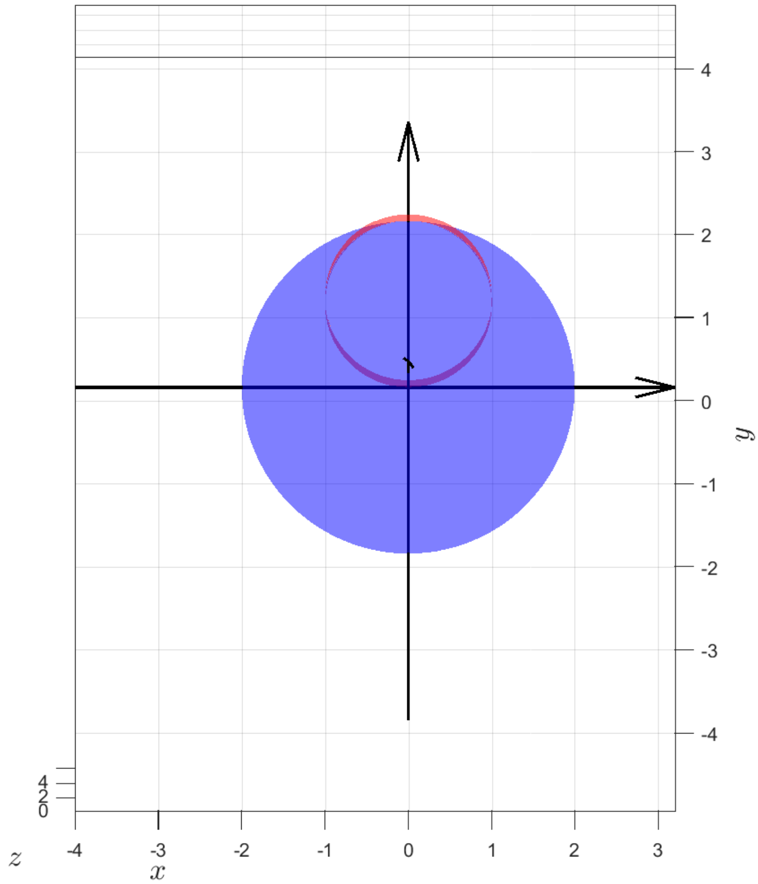


Figure 8:

Problem 15.1.3.

Skissa vektorfältet

$$\mathbf{F}(x, y, z) = y\mathbf{i} + x\mathbf{i}$$

och bestäm dess fältlinjer.

Lösning: Fältlinjerna ges av ekvationen

$$\frac{\mathrm{d}x}{F_1} = \frac{\mathrm{d}y}{F_2}$$

vilket i vårt fall blir

$$\frac{\mathrm{d}x}{y} = \frac{\mathrm{d}y}{x} \qquad \Rightarrow \qquad x\ \mathrm{d}x = y\ \mathrm{d}y \qquad \Rightarrow \qquad \int x\ \mathrm{d}x = \int y\ \mathrm{d}y.$$

Båda dessa integraler kan beräknas utan problem och vi finner att

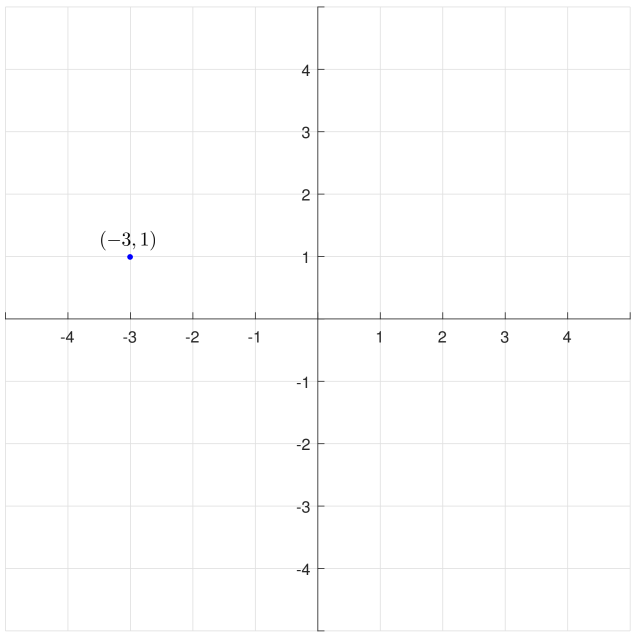
$$\frac{1}{2}x^2 + c_1 = \frac{1}{2}y^2 + c_2 \qquad \Rightarrow \qquad x^2 - y^2 = \underbrace{2(c_2 - c_1)}_{c},$$

så fältlinjerna ges alltså av ekvationen

$$\boxed{x^2 - y^2 = c}$$

Vi skissar vektorfältet genom följande process:

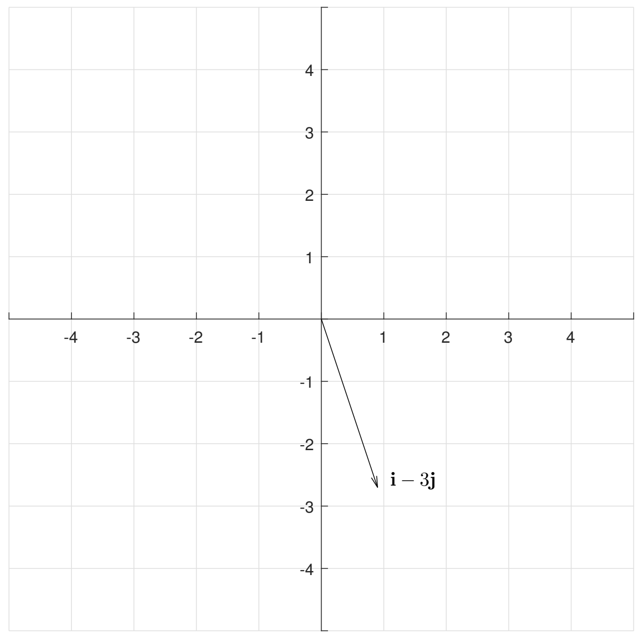
1. Välj ut en punkt (x, y) i planet, exempelvis $(-3, 1)$.



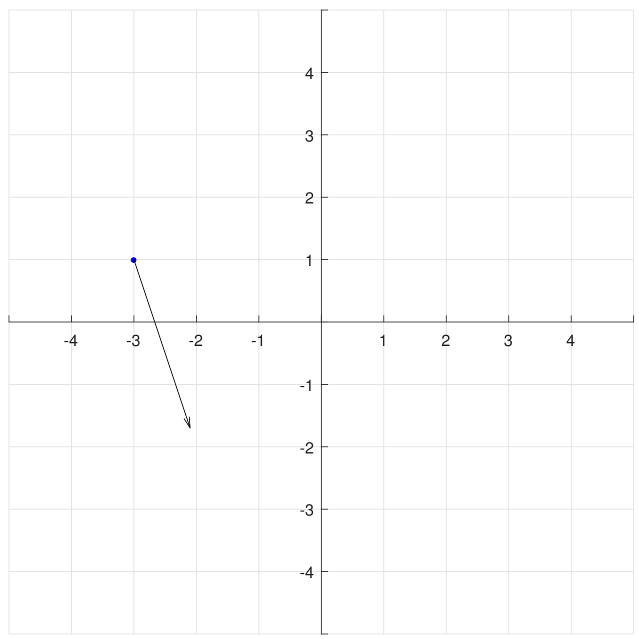
2. Beräkna $\mathbf{F}(x, y)$:

$$\mathbf{F}(-3, 1) = \mathbf{i} - 3\mathbf{j}$$

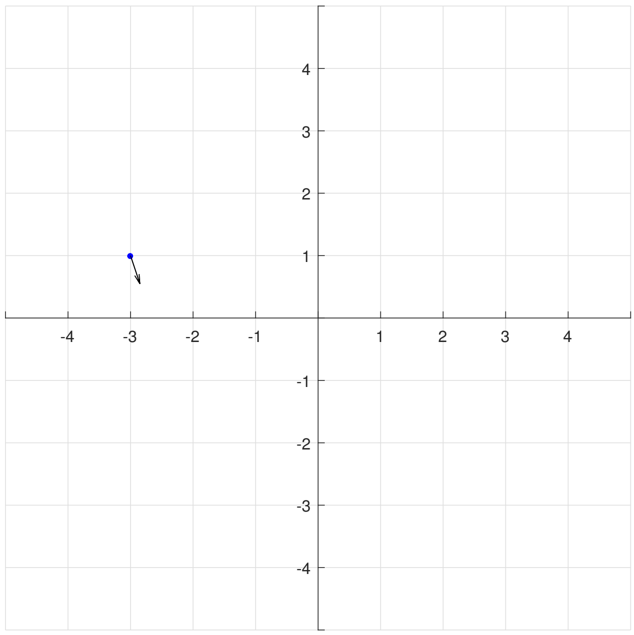
3. Undersök hur vektorn $\mathbf{F}(-3,1) = \mathbf{i} - 3\mathbf{j}$ ser ut om vi placerar den med startpunkt i origo:



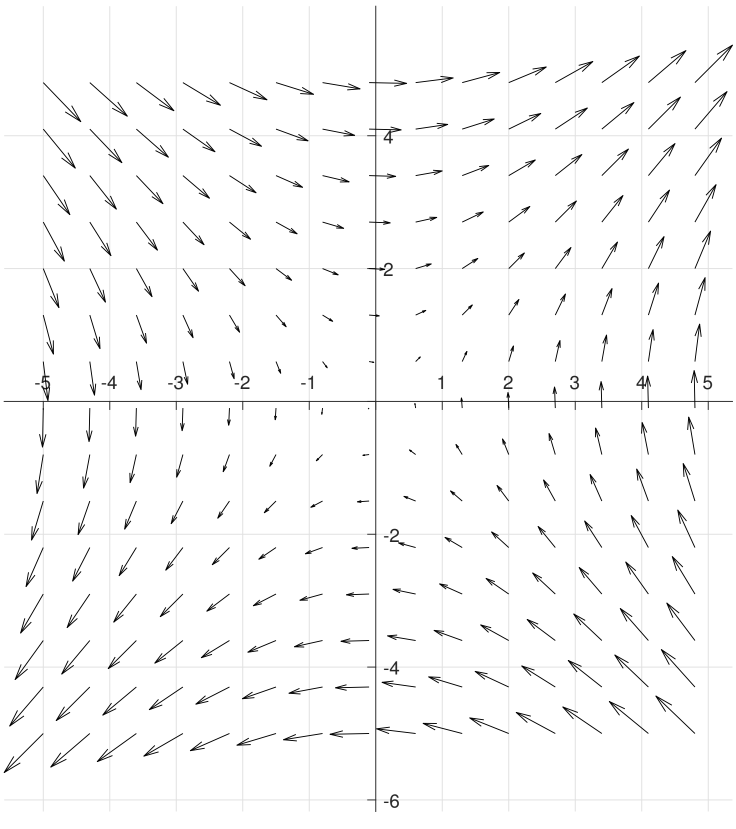
4. Tag samma vektor men låt dess startpunkt vara $(x, y) = (-3, 1)$ istället:



Längden hos en enskild vektor är inte viktig, det är bättre att göra den kortare:



5. Upprepa samma process för många fler punkter (x, y):



De olika längderna på pilarna reflekterar faktumet att olika fältvektorer $\mathbf{F}(x, y)$ är olika långa. Längre fältvektorer får längre pilar, men man har skalat ned alla längder. Om vi säger att xy-planet utgör en karta över någon region i världen och fältet $\mathbf{F}(x, y)$ representerar vindriktningen på positionen (x, y) så svarar en större pil mot en större vindstyrka. För en tydligare illustration av detta exempel, se följande hemsida: `https://earth.nullschool.net`

Notera att fältlinjernas ekvation

$$c = x^2 - y^2$$

kan tolkas som nivåkurvor till funktionen

$$z = x^2 - y^2.$$

Dessa nivåkurvor följer pilarnas banor, viket förklarar varför de kallas fältlinjer:

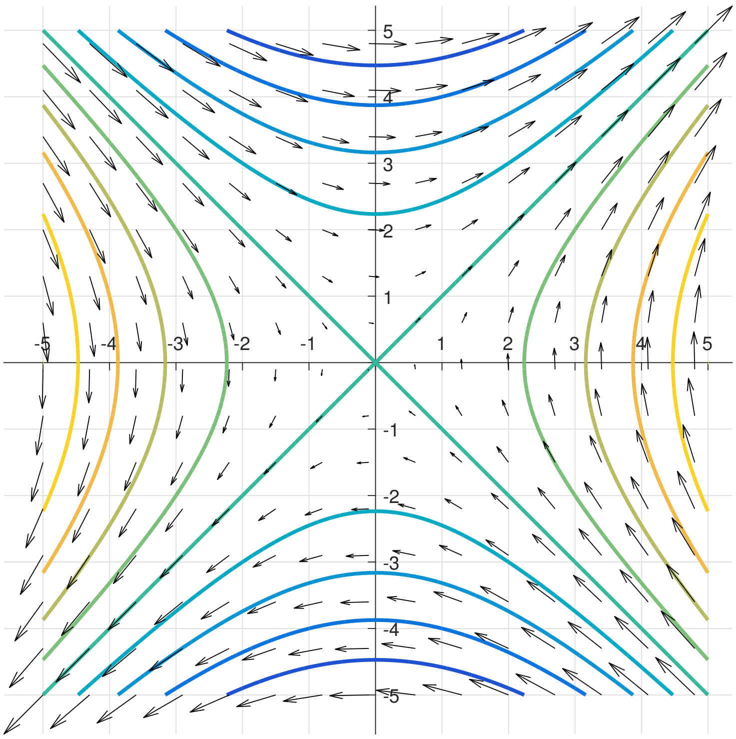


Figure 9: De svarta pilarna illustrerar fältet $\mathbf{F}(x, y) = y\mathbf{i} + x\mathbf{j}$. De färgade kurvorna illusterar fältlinjerna $c = x^2 - y^2$ för olika värden på c och kan betraktas som nivåkurvor till $z = x^2 - y^2$.

Problem 15.1.6.

Skissa vektorfältet som ges av

$$\mathbf{F} = \nabla\phi \qquad \text{för} \qquad \phi(x, y) = x^2 - y,$$

och bestäm dess fältlinjer.

Lösning: Vektorfältet kan skrivas som

$$F = F_1\mathbf{i} + F_2\mathbf{j} = \frac{\partial\phi}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial\phi}{\partial y}\mathbf{j} = 2x\mathbf{i} - \mathbf{j},$$

så fältilnjernas ekvation uppfyller

$$\frac{\mathrm{d}x}{2x} = \frac{\mathrm{d}y}{-1} \qquad \Rightarrow \qquad -\frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}x}{x} = \int 1\ \mathrm{d}y.$$

Vi drar slutsatsen att

$$y = -\frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}x}{x} = -\frac{1}{2}\ln|x| + c.$$

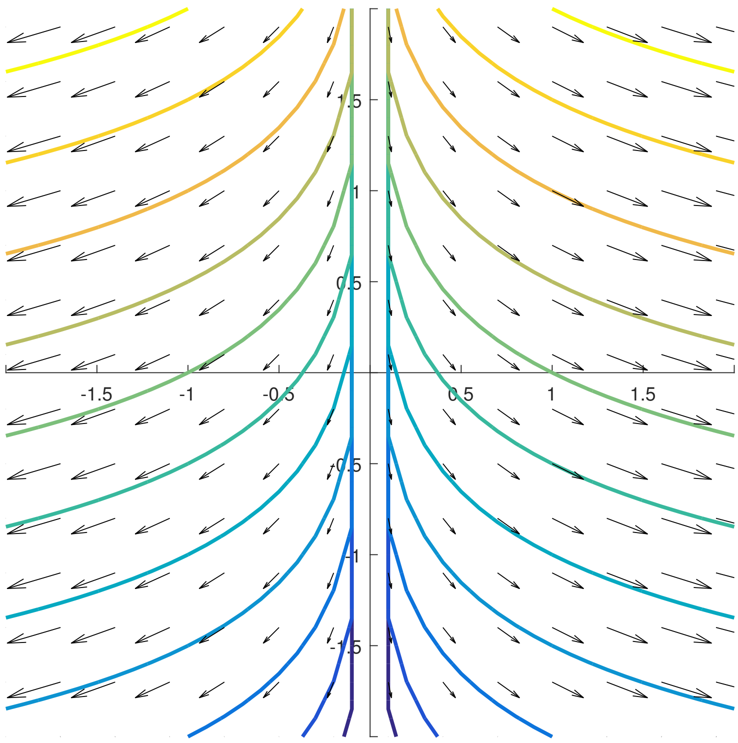


Figure 10: De svarta pilarna illustrerar fältet $\mathbf{F}(x, y) = 2x\mathbf{i} - \mathbf{j}$. De färgade kurvorna illusterar fältlinjerna $y = -\frac{1}{2}\ln|x| + c \iff c = y + \frac{1}{2}\ln|x|$ för olika värden på c och kan betraktas som nivåkurvor till $z = y + \frac{1}{2}\ln|x|$.

Problem 15.2.1.

Avgör huruvida vektorfältet

$$\mathbf{F}(x, y, z) = x\mathbf{i} - 2y\mathbf{j} + 3z\mathbf{k}$$

är konservativt och hitta i så fall dess potential.

Lösning: Ett vektorfält är konservativt om det kan skrivas som gradienten av en potential:

$$\mathbf{F} = \nabla\phi$$

för någon funktion $\phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, vilket i så fall innebär att

$$F_1 = \frac{\partial\phi}{\partial x}, \qquad F_2 = \frac{\partial\phi}{\partial y}, \qquad F_3 = \frac{\partial\phi}{\partial z}.$$

En sådan funktion ϕ måste uppfylla ekvationerna

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial y\partial x} = \frac{\partial^2\phi}{\partial x\partial y}, \qquad \frac{\partial^2\phi}{\partial z\partial x} = \frac{\partial^2\phi}{\partial x\partial z}, \qquad \frac{\partial^2\phi}{\partial z\partial y} = \frac{\partial^2\phi}{\partial y\partial z},$$

eftersom det inte spelar någon roll i vilken ordning vi deriverar funktionen, och om vi skriver ovanstående ekvationer i termer av F_1, F_2, F_3 får vi ekvationerna

$$\frac{\partial F_1}{\partial y} = \frac{\partial F_2}{\partial x}, \qquad \frac{\partial F_1}{\partial z} = \frac{\partial F_3}{\partial x}, \qquad \frac{\partial F_2}{\partial z} = \frac{\partial F_3}{\partial y}. \tag{5}$$

Ovanstående ekvationer *måste* vara uppfyllda om $\mathbf{F}$ ska kunna vara ett konservativt vektorfält; om ekvationerna inte är uppfyllda så kan det inte existera någon funktion ϕ sådan att $\mathbf{F} = \nabla\phi$.

I vårt fall är

$$\begin{cases} F_1 = x \\ F_2 = -2y \\ F_3 = 3z \end{cases},$$

och man kontrollerar enkelt att detta vektorfält uppfyller ekvationerna (5). Detta innebär inte nödvändigtvis att vektorfältet är konservativt, men vi har inte lyckats avfärda möjligheten.

Om $\mathbf{F} = \nabla\phi$ så måste vi ha att

$$\frac{\partial\phi}{\partial x} = F_1 = x \qquad \Rightarrow \qquad \phi = \frac{x^2}{2} + C(y, z),$$

för någon funktion $C(y, z)$ som är oberoende av x. På samma sätt får vi att

$$\frac{\partial\phi}{\partial y} = F_2 = -2y \qquad \Rightarrow \qquad \phi = \frac{x^2}{2} - y^2 + C(z)$$

för någon funktion $C(z)$ som är oberoende av x och y. Slutligen får vi att

$$\frac{\partial\phi}{\partial z} = F_3 = 3z \qquad \Rightarrow \qquad \phi = \frac{x^2}{2} - y^2 + \frac{3z^2}{2} + c$$

för någon konstant c. Vi har alltså funnit en potential

$$\phi(x, y, z) = \frac{x^2}{2} - y^2 + \frac{3z^2}{2} + c,$$

sådan att $\mathbf{F} = \nabla\phi$ och vi drar därmed slutsatsen att vektorfältet $\mathbf{F}$ är konservativt.

Problem 15.2.3.

Avgör huruvida vektorfältet

$$\mathbf{F}(x,y) = \frac{x\mathbf{i} - y\mathbf{j}}{x^2 + y^2}$$

är konservativt och hitta i så fall dess potential.

Lösning: Ett konservativt vektorfält måste uppfylla ekvationen

$$\frac{\partial F_1}{\partial y} = \frac{\partial F_2}{\partial x},$$

men i detta fall finner vi att

$$\frac{\partial F_1}{\partial y} = -\frac{2xy}{x^2 + y^2} \qquad \text{och} \qquad \frac{\partial F_2}{\partial x} = +\frac{2xy}{x^2 + y^2}.$$

Ekvationen är alltså inte uppfylld, så vektorfältet $\mathbf{F}$ är inte konservativt.

Problem 15.2.4.

Avgör huruvida vektorfältet

$$\mathbf{F}(x, y) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$$

är konservativt och hitta i så fall dess potential.

Lösning: Vi börjar med att kontrollera den vanliga ekvationen:

$$\frac{\partial F_1}{\partial y} = -\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2} = \frac{\partial F_2}{\partial x}.$$

Ekvationen är uppfylld, så vektorfältet kan vara konservativt. Om vektorfältet är konservativt, det vill säga att $\mathbf{F} = \nabla\phi$ för någon potential $\phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, så måste vi ha

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = F_1 = \frac{x}{x^2+y^2} \qquad \text{och} \qquad \frac{\partial \phi}{\partial y} = F_2 = \frac{y}{x^2+y^2}.$$

Integrera den första av dessa ekvationer:

$$\phi(x, y) = \int \frac{x}{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x = \begin{bmatrix} r = x^2+y^2 \\ \mathrm{d}r = 2x\,\mathrm{d}x \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}r}{r} = \frac{1}{2}\ln\bigl(x^2+y^2\bigr) + C(y),$$

för någon funktion $C(y)$. Vi kan få information om funktionen $C(y)$ genom att derivera ovanstående uttryck för ϕ med avseende på y och jämföra med vår kända funktion F_2:

$$\frac{y}{x^2+y^2} = F_2 = \frac{\partial \phi}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{2}\ln\bigl(x^2+y^2\bigr) + C(y)\right) = \frac{y}{x^2+y^2} + C'(y),$$

så i detta fall är $C'(y) = 0$, vilket innebär att $C(y)$ är konstant. Potentialen kan därför skrivas

$$\phi(x, y) = \frac{1}{2}\ln\bigl(x^2+y^2\bigr) + c$$

för någon konstant c.

Problem 15.3.2.

Låt $\mathcal{C}$ vara den koniska helixen med parameterisk ekvation

$$\begin{cases} x = t\cos t \\ y = t\sin t \\ z = t \end{cases}, \qquad 0 \le t \le 2\pi.$$

Finn

$$\int_{\mathcal{C}} z \, \mathrm{d}s.$$

Lösning: För att se varför kurvan bildar en konisk helix, notera att koordinaterna uppfyller konens ekvation

$$z^2 = x^2 + y^2,$$

och att xy-koordinaterna tillsammans beskriver en cirkulär rörelse vars radie växer med t. Eftersom z-koordinaten också växer med t får vi en konisk helix, se Figur 11.

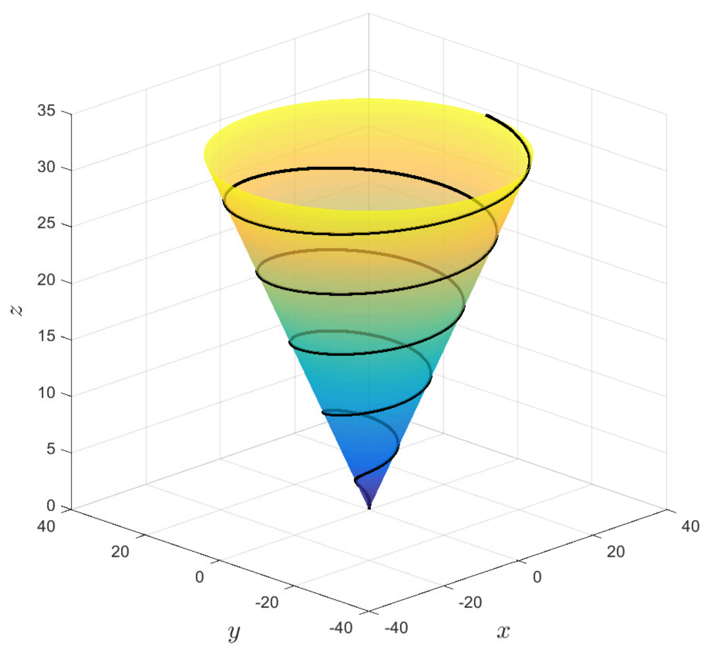


Figure 11:

Låt oss nu beräkna integralen i uppgiften. Beräkna först

$$\mathrm{d}s = \left|\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t}\right| \mathrm{d}t = \sqrt{(\cos t - t\sin t)^2 + (\sin t + t\cos t)^2 + 1}\ \mathrm{d}t = \sqrt{2+t^2}\ \mathrm{d}t$$

och mata sedan in detta uttryck i integralen:

$$\int_{\mathcal{C}} z\ \mathrm{d}s = \int_0^{2\pi} t\sqrt{2+t^2}\ \mathrm{d}t = \begin{bmatrix} u = 2+t^2 \\ \mathrm{d}u = 2t\ \mathrm{d}t \\ 2 \le u \le 4\pi^2+2 \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\int_2^{4\pi^2+2} \sqrt{u}\ \mathrm{d}u$$

Integralens värde är alltså

$$\frac{1}{2}\left[\frac{2}{3}u^{3/2}\right]_2^{4\pi^2+2} = \frac{1}{3}\left((4\pi^2+2)^{3/2} - 2^{3/2}\right).$$

Problem 15.4.8.

Utvärdera kurvintegralen

$$\oint_{\mathcal{C}} x^2y^2 \, \mathrm{d}x + x^3y \, \mathrm{d}y$$

där kurvan $\mathcal{C}$ går ett moturs varv runt kvadraten med hörn i punkterna

$$(0,0), \qquad (0,1), \qquad (1,0), \qquad (1,1).$$

Lösning: Det är väldigt enkelt att beräkna integraler längsmed räta linjer och kvadraten består av fyra sådana:

$$\mathcal{C} = \mathcal{C}_{x0} + \mathcal{C}_{1y} + \mathcal{C}_{x1} + \mathcal{C}_{0y},$$

där $\mathcal{C}_{x0}$ är linjestycket $0 \leq x \leq 1$ och $y = 0$, och så vidare. Vi måste även komma ihåg orienteringen när vi beräknar våra integraler, så när vi integrerar över linjestycket $\mathcal{C}_{0y}$ som uppfyller $x = 0$ och $0 \leq y \leq 1$, så ska vi integrera uppifrån och ned (dvs från 1 till 0 $\mathrm{d}y$) snarare än nedifrån och upp. Vi får alltså de fyra integralerna

$$\begin{aligned}\oint_{\mathcal{C}} x^2y^2 \, \mathrm{d}x + x^3y \, \mathrm{d}y = &\int_{\mathcal{C}_{x0}} x^2y^2 \, \mathrm{d}x + x^3y \, \mathrm{d}y + \int_{\mathcal{C}_{1y}} x^2y^2 \, \mathrm{d}x + x^3y \, \mathrm{d}y + \\ &+ \int_{\mathcal{C}_{x1}} x^2y^2 \, \mathrm{d}x + x^3y \, \mathrm{d}y + \int_{\mathcal{C}_{0y}} x^2y^2 \, \mathrm{d}x + x^3y \, \mathrm{d}y\end{aligned}$$

Den första integralen är som sagt över linjen $0 \leq x \leq 1$ och $y = 0 \;\Rightarrow\; \mathrm{d}y = 0$, så

$$\int_{\mathcal{C}_{x0}} x^2y^2 \, \mathrm{d}x + x^3y \, \mathrm{d}y = \int_0^1 x^2 * 0 \, \mathrm{d}x = 0.$$

Den andra gralen är över linjen $x = 1 \;\Rightarrow\; \mathrm{d}x = 0$ och $0 \leq y \leq 1$, så

$$\int_{\mathcal{C}_{1y}} x^2y^2 \, \mathrm{d}x + x^3y \, \mathrm{d}y = \int_0^1 1 * y \, \mathrm{d}y = \left[\frac{1}{2}y^2\right]_0^1 = \frac{1}{2}.$$

Den tredje integralen är över linjen $0 \leq x \leq 1$ och $y = 1 \;\Rightarrow\; \mathrm{d}y = 0$ men integralen ska gå från från höger till vänster, det vill säga från $x = 1$ till $x = 0$. Således är

$$\int_{\mathcal{C}_{x1}} x^2y^2 \, \mathrm{d}x + x^3y \, \mathrm{d}y = \int_1^0 x^2 * 1 \, \mathrm{d}x = \left[\frac{1}{3}x^3\right]_1^0 = -\frac{1}{3}.$$

Den fjärde integralen är över linjen $x = 0 \;\Rightarrow\; \mathrm{d}x = 0$ och $0 \leq y \leq 1$ men integralen ska gå uppifrån och ned, det vill säga från $y = 1$ till $y = 0$. Således är

$$\int_{\mathcal{C}_{0y}} x^2y^2 \, \mathrm{d}x + x^3y \, \mathrm{d}y = \int_1^0 0 * y \, \mathrm{d}y = 0.$$

Det följer att

$$\oint_{\mathcal{C}} x^2y^2 \, \mathrm{d}x + x^3y \, \mathrm{d}y = 0 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + 0 = \frac{1}{6}.$$

Problem 15.4.17.

Beräkna integralerna

$$\text{(a)} \quad \oint_{\mathcal{C}} x \ \mathrm{d}y, \qquad \text{(b)} \quad \oint_{\mathcal{C}} y \ \mathrm{d}x,$$

runt kurvan $\mathcal{C}$.

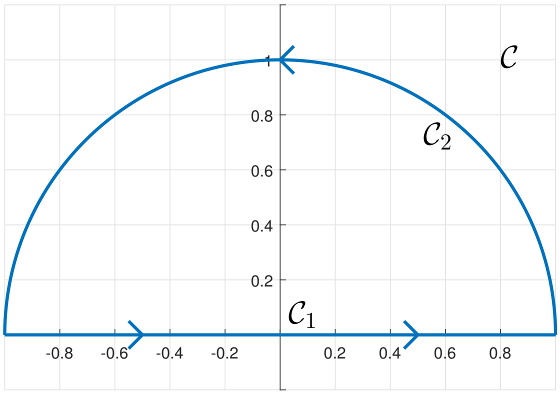


Figure 12: Kurvan $\mathcal{C}$ löper moturs runt en halvdisk med radie a, och utgörs av den räta delkurvan $\mathcal{C}_1$ och den cirkulära delkurvan $\mathcal{C}_2$. Denna bild har genererats med radien $a = 1$ men i uppgiften låter vi radien a vara godtycklig.

Lösning: Vi utför integrationen över $\mathcal{C}_1$ och $\mathcal{C}_2$ separat:

$$\text{(a)} \quad \oint_{\mathcal{C}} x \ \mathrm{d}y = \int_{\mathcal{C}_1} x \ \mathrm{d}y + \int_{\mathcal{C}_2} x \ \mathrm{d}y$$

Notera att vi längs $\mathcal{C}_1$ har $\mathrm{d}y = 0$. Längs $\mathcal{C}_2$ kan vi parameterisera:

$$\begin{cases} x = a\cos t \\ y = a\sin t \\ \mathrm{d}y = a\cos t \ \mathrm{d}t \end{cases}, \qquad 0 \leq t \leq \pi,$$

vilket innebär att

$$\oint_{\mathcal{C}} x \ \mathrm{d}y = \int_{\mathcal{C}_1} x \ \mathrm{d}y + \int_{\mathcal{C}_2} x \ \mathrm{d}y = 0 + \int_0^{\pi} (a\cos t)(a\cos t) \ \mathrm{d}t =$$
$$= a^2 \int_0^{\pi} \cos^2 t \ \mathrm{d}t = \frac{a^2}{2} \int_0^{\pi} (1 + \cos 2t) \ \mathrm{d}t = \frac{\pi a^2}{2}.$$

Låt oss nu beräkna (b), återigen genom att dela upp kurvan $\mathcal{C}$ i de två delarna $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2$:

$$\oint_{\mathcal{C}} y \ \mathrm{d}x = \int_{\mathcal{C}_1} y \ \mathrm{d}x + \int_{\mathcal{C}_2} y \ \mathrm{d}x.$$

Längs $\mathcal{C}_1$ har vi $y = 0$ så den första integralen försvinner, och genom samma sorts parameterisering som i förra deluppgiften finner vi att

$$\oint_{\mathcal{C}} y \, \mathrm{d}x = 0 + \int_{\mathcal{C}_2} y \, \mathrm{d}x = \int_0^{\pi} (a \sin t) \underbrace{(-a \sin t) \, \mathrm{d}t}_{\mathrm{d}x} =$$
$$= -a^2 \int_0^{\pi} \sin^2 t \, \mathrm{d}t = -\frac{a^2}{2} \int_0^{\pi} (1 - \cos 2t) \, \mathrm{d}t = -\frac{\pi a^2}{2}$$

Problem 15.4.24.

Denna uppgift är överkurs, så ni kan skippa den om ni vill. Jag har med uppgiften för att den relaterar till mitt masterarbete om så kallade topologiska material och för att den är riktigt cool.

Låt $\mathcal{C}$ vara en styckvis glatt[1] kurva i xy-planet som inte går igenom origo. Varje punkt (x, y) på kurvan kan skrivas med polära koordinater och vi låter den polära vinkeln $\theta = \theta(x, y)$ anta vilka värden som helst, inte bara värden mellan 0 och 2π. Som Exempel 5 i kapitel 15.2 visar så får vi

$$\text{grad } \theta = \nabla\theta = \frac{\partial\theta(x,y)}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial\theta(x,y)}{\partial y}\mathbf{j} = -\frac{y}{x^2+y^2}\mathbf{i} + \frac{x}{x^2+y^2}\mathbf{j} \tag{6}$$

Uppgift: Bevisa att om kurvan $\mathcal{C}$ är sluten, så är kurvintegralen

$$w(\mathcal{C}) = \frac{1}{2\pi}\oint_{\mathcal{C}} \frac{x\ \mathrm{d}y - y\ \mathrm{d}x}{x^2+y^2}$$

ett heltal.

Lösning: Kurvan går att parameterisera och sätta på formen

$$\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t)), \qquad a \le t \le b,$$

för några värden på a, b. Vi har antagit att kurvan $\mathcal{C}$ inte går igenom origo, så den polära vinkeln

$$\theta = \theta(x(t), y(t)) =: \theta(t), \qquad a \le t \le b$$

är väldefinierad överallt och bildar en kontinuerlig funktion. Eftersom kurvan är sluten får vi

$$\mathbf{r}(a) = \mathbf{r}(b) \qquad \Rightarrow \qquad \begin{cases} r(a)\cos(\theta(a)) = x(a) = x(b) = r(b)\cos(\theta(b)) \\ r(a)\sin(\theta(a)) = y(a) = y(b) = r(b)\sin(\theta(b)) \end{cases}$$

vilket implicerar att $\cos(\theta(a)) = \cos(\theta(b))$ och $\sin(\theta(a)) = \sin(\theta(b))$. Detta är bara möjligt om

$$\theta(b) = \theta(a) + 2\pi n$$

för något heltal n. Heltalet n är det antal (moturs) varv som kurvan $\mathcal{C}$ löper runt origo.

Tack vare ekvation (6) kan integranden skrivas om som

$$\frac{x\ \mathrm{d}y - y\ \mathrm{d}x}{x^2+y^2} = -\frac{y}{x^2+y^2}\ \mathrm{d}x + \frac{x}{x^2+y^2}\ \mathrm{d}y = \frac{\partial\theta}{\partial x}\ \mathrm{d}x + \frac{\partial\theta}{\partial y}\ \mathrm{d}y = \nabla\theta \cdot \mathrm{d}\mathbf{r},$$

så den polära vinkeln θ är en potential till det vektorfält som vi betraktar. Integralen blir därför

$$w(\mathcal{C}) = \frac{1}{2\pi}\oint_{\mathcal{C}} \frac{x\ \mathrm{d}y - y\ \mathrm{d}x}{x^2+y^2} = \frac{1}{2\pi}\oint_{\mathcal{C}} \nabla\theta\cdot\mathrm{d}\mathbf{r} = \frac{1}{2\pi}\underbrace{\Big(\theta(b) - \theta(a)\Big)}_{2\pi n} = n,$$

vilket alltså är ett heltal. Dessa winding numbers är av stort intresse inom modern fysik eftersom de är "topologiska invarianter" som ger information om den extremt stabila strömledningsförmågan längsmed randen hos så kallade topologiska material. För mer information, se

`https://www.nobelprize.org/prizes/physics/2016/popular-information/`
`https://www.nobelprize.org/prizes/physics/2016/advanced-information/`

[1]Engelsk term: *piecewise smooth*

Problem 15.5.7.

Beräkna

$$\iint_S x \, \mathrm{d}S$$

över den del av den paraboliska cylindern $z = \frac{1}{2}x^2$ som ligger i den första oktanten av cylindern

$$x^2 + y^2 = 1$$

Anmärkning: Jag har tolkat "oktant" som den första halvan av första kvadranten i xy-planet:

$$\left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; x \geq 0,\ y \geq 0,\ \text{och } y \leq x\right\},$$

men det är möjligt att författaren av boken syftade på den första oktanten i rummet:

$$\left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; x \geq 0,\ y \geq 0,\ z \geq 0\right\}.$$

Min tolkning ger upphov till en mycket svår integral som vi måste approximera istället för att beräkna exakt, men processen för att hitta integrationsgränser är mer intressant.

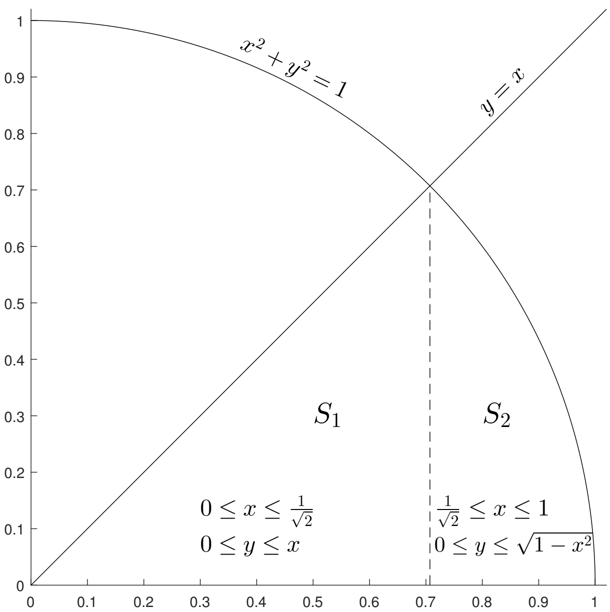
Lösning: På ytan S med ekvation $z = \frac{1}{2}x^2$ har vi $\frac{\partial z}{\partial x} = x$ och $\frac{\partial z}{\partial y} = 0$, vilket ger areaelementet

$$\mathrm{d}S = \sqrt{1 + x^2}\, \mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

I den första kvadranten ger cirkelns ekvation att $y \leq \sqrt{1 - x^2}$ och eftersom vi mer specifikt befinner oss i första *okt*anten, det vill säga under den 45-gradiga linjen $y = x$, får vi även begränsningen $y \leq x$. Vi har alltså två stycken övre begränsningar på y att förhålla oss till och detta gör vi enklast genom att dela upp integralen i två delar:

$$\iint_S x \, \mathrm{d}S = \iint_{S_1} x \, \mathrm{d}S + \iint_{S_2} x \, \mathrm{d}S$$

där S_1 är den region där $y \leq x$ är den viktigaste begränsningen och S_2 är den region där $y \leq \sqrt{1 - x^2}$ är den viktigaste begränsningen. Se nedanstående figur.



Gränsen mellan dessa två områden går där

$$x = y = \sqrt{1-x^2} \quad \Rightarrow \quad x^2 = 1 - x^2 \quad \Rightarrow \quad 2x^2 = 1 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{1}{\sqrt{2}},$$

så integralen över S_1 blir

$$\iint_{S_1} x \, \mathrm{d}S = \int_0^{1/\sqrt{2}} x\sqrt{1+x^2} \, \mathrm{d}x \int_0^x \, \mathrm{d}y = \int_0^{1/\sqrt{2}} x^2\sqrt{1+x^2} \, \mathrm{d}x \approx 0.13420.$$

Jag har valt att skriva ett approximativt värde (beräknat med WolframAlpha) eftersom den primitiva funktionen till $x^2\sqrt{1+x^2}$ har ett mycket bökigt uttryck som bland annat innehåller inversen till sinh och lite annat smått och gott. Jag anser att syftet med denna uppgift är att lära sig hitta integrationsgränser, så det är inte jättenoga om vi sen approximerar själva integralerna.

Integralen över S_2 är lite enklare, den blir

$$\iint_{S_2} x \, \mathrm{d}S = \int_{1/\sqrt{2}}^1 x\sqrt{1+x^2} \, \mathrm{d}x \int_0^{\sqrt{1-x^2}} \, \mathrm{d}y = \int_{1/\sqrt{2}}^1 x\sqrt{1-x^4} \, \mathrm{d}x = \begin{bmatrix} u = x^2 \\ \mathrm{d}u = 2x \, \mathrm{d}x \\ 0 \le u \le 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^1 \sqrt{1-u^2} \, \mathrm{d}u = \frac{1}{2} * \frac{\text{omkrets hos cirkel med radie 1}}{4} = \frac{1}{2}\frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{8}$$

där vi har tolkat $v = \sqrt{1-u^2}$ som höjd-koordinaten på en cirkel $u^2 + v^2 = 1$ för $0 \le u \le 1$.

Allt som allt har vi

$$\iint_S x \, \mathrm{d}S = \iint_{S_1} x \, \mathrm{d}S + \iint_{S_2} x \, \mathrm{d}S \approx 0.13420 + \frac{\pi}{8} \approx 0.5269.$$

Problem 15.5.13.

Beräkna

$$\iint_S y \, \mathrm{d}S$$

där S är den del av planet $z - y = 1$ som ligger inuti konen $z = \sqrt{2(x^2 + y^2)}$.

Lösning: Skärningen uppfyller ekvationen

$$\begin{aligned} 2(x^2 + y^2) = z^2 = (y+1)^2 \qquad &\Longleftrightarrow \qquad 2x^2 + 2y^2 = y^2 + 2y + 1 \\ &\Longleftrightarrow \qquad 2x^2 + y^2 - 2y = 1 \\ &\Longleftrightarrow \qquad 2x^2 + (y-1)^2 = 2 \\ &\Longleftrightarrow \qquad x^2 + \frac{1}{2}(y-1)^2 = 1, \end{aligned}$$

vilket är en ellips E med centrum i $(0, 1)$, se Figur 13-14. Vi får även areaelementet

$$\mathrm{d}S = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2} \, \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \sqrt{2} \, \mathrm{d}x\mathrm{d}y, \qquad \text{där} \qquad f(x,y) = y + 1,$$

så vår integral blir

$$\iint_S y \, \mathrm{d}S = \sqrt{2} \iint_E y \, \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \sqrt{2} * \text{Area}(E) * \text{medelvärdet av } y \text{ på ellipsen } E$$

Medelvärdet av integranden y över ellipsen E är av symmetriskäl lika med y-värdet i ellipsens mittpunkt, vilket ger medelvärdet 1. Vidare kan man beräkna arean hos en ellips

$$\tilde{E} = \left\{ (x,y) \;\middle|\; \frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1 \right\}$$

via formeln $\text{Area}(\tilde{E}) = \pi ab$. I vårt fall är $a = 1$ och $b = \sqrt{2}$ så vår ellips har arean $\sqrt{2}\pi$. Det följer att

$$\iint_S y \, \mathrm{d}S = \sqrt{2} * \sqrt{2}\pi * 1 = 2\pi.$$

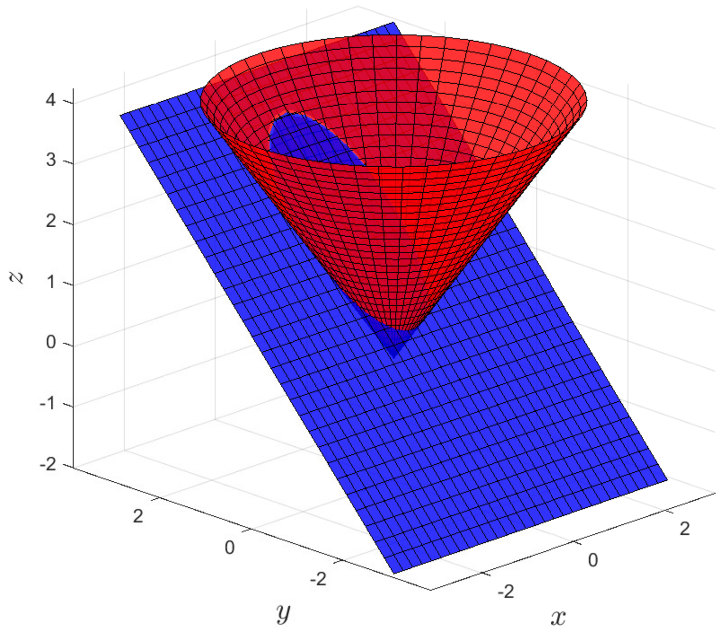


Figure 13: Konen $z = \sqrt{2(x^2 + y^2)}$ och planet $z - y = 1$ skär varandra i en ellips.

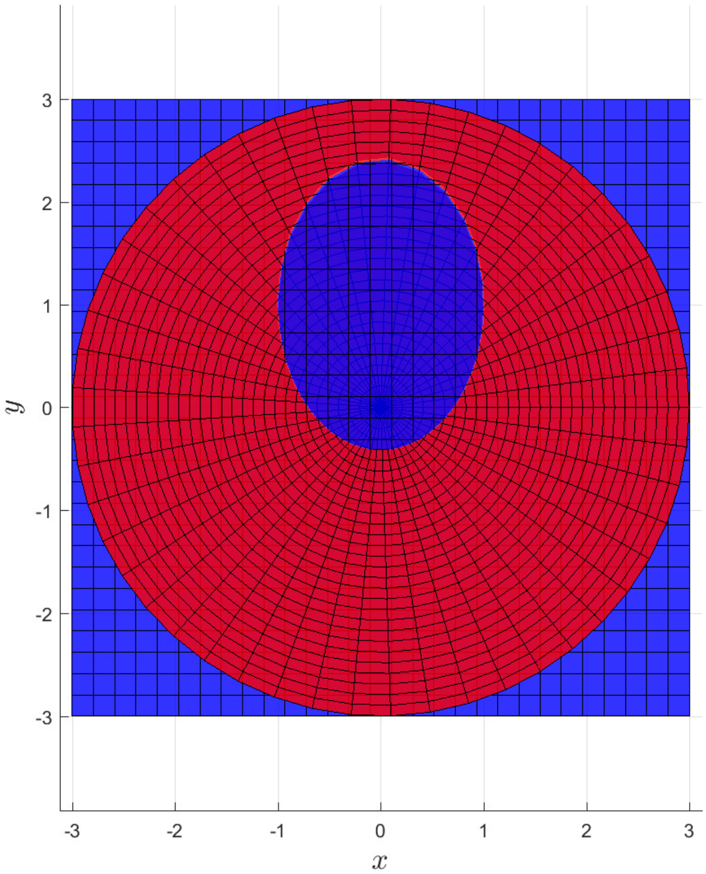


Figure 14: Konen $z = \sqrt{2(x^2 + y^2)}$ och planet $z - y = 1$ skär varandra i en ellips.

Problem 15.5.14.

Låt nu S vara den del av konen $z = \sqrt{2(x^2 + y^2)}$ som ligger *under* planet $z - y = 1$. Beräkna

$$\iint_S y \, \mathrm{d}S$$

Lösning: I detta fall har vi $z = f(x, y) = \sqrt{2(x^2 + y^2)}$, vilket ger areaelementet

$$\mathrm{d}S = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2} \, \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \sqrt{1 + \frac{4x^2}{2(x^2 + y^2)} + \frac{4y^2}{2(x^2 + y^2)}} \, \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \sqrt{3} \, \mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

Via samma argument som i förra uppgiften drar vi slutsatsen att

$$\iint_S y \, \mathrm{d}S = \sqrt{3} * \mathrm{Area}(E) * \text{ medelvärdet av } y \text{ på ellipsen } E = \sqrt{3} * \sqrt{2}\pi * 1 = \sqrt{6}\pi.$$

Problem 15.5.17.

Finn den totala laddningen på ytan

$$\mathbf{r} = e^u \cos v\mathbf{i} + e^u \sin v\mathbf{j} + u\mathbf{k} \qquad (0 \le u \le 1, 0 \le v \le \pi),$$

om laddningstätheten på ytan är $\delta = \sqrt{1 + e^{2u}}$.

Lösning: På ytan S har vi alltså koordinaterna

$$x = e^u \cos v, \qquad y = e^u \sin v, \qquad z = u,$$

så att $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$. Areaelementet ges av

$$\mathrm{d}S = \left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \right| \mathrm{d}u\mathrm{d}v$$

där

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ e^u \cos v & e^u \sin v & 1 \\ -e^u \sin v & e^u \cos v & 0 \end{vmatrix} = \\
&= \Big(0 - e^u \cos v\Big)\mathbf{i} - \Big(0 + e^u \sin v\Big)\mathbf{j} + \Big(e^{2u} \cos^2 v + e^{2u} \sin^2 v\Big)\mathbf{k} = \\
&= -e^u \cos v\mathbf{i} - e^u \sin v\mathbf{j} + e^{2u}\mathbf{k}
\end{aligned}$$

Tar vi nu beloppet av denna vektor så får vi areaelementet

$$\mathrm{d}S = \left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \right| \mathrm{d}u\mathrm{d}v = \sqrt{e^{2u} \cos^2 v + e^{2u} \sin^2 v + e^{4u}}\mathrm{d}u\mathrm{d}v = e^u \sqrt{1 + e^{2u}}\ \mathrm{d}u\mathrm{d}v.$$

Eftersom laddningstätheten är $\delta = \sqrt{1 + e^{2u}}$ så är den totala laddningen

$$\begin{aligned}
\iint_S \sqrt{1 + e^{2u}}\ \mathrm{d}S &= \int_0^1 e^u (1 + e^{2u})\ \mathrm{d}u \int_0^\pi \mathrm{d}v = \\
&= \pi \int_0^1 e^u + e^{3u}\ \mathrm{d}u = \pi \left[e^u + \frac{1}{3} e^{3u} \right]_0^1 = \frac{\pi}{3}\big(3e + e^3 - 4\big).
\end{aligned}$$

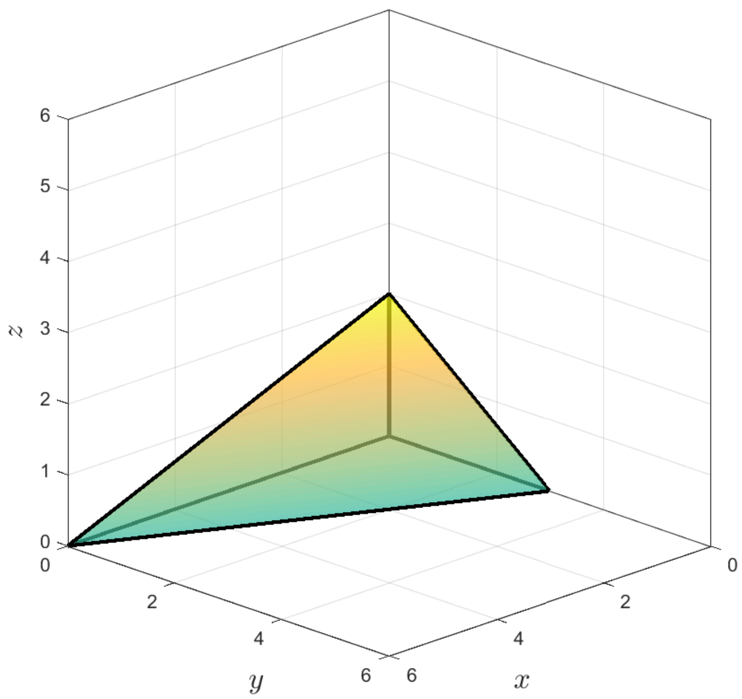
Problem 15.6.1.

Bestäm flödet av $\mathbf{F} = x\mathbf{i} + z\mathbf{j}$ ut ur tetraedern T som begränsas av koordinatplanen och planet

$$x + 2y + 3z = 6$$

Detta är alltså tetraedern med hörn i punkterna

$$(0,0,0), \quad (6,0,0), \quad (0,3,0), \quad (0,0,2)$$



Lösning: Vi vill beräkna flödesintegralen

$$\oiint_S \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{n}} \, \mathrm{d}S$$

där $S = \partial T$ är tetraederns rand. Vi skullle kunna göra detta direkt genom att först dela upp randen i fyra olika plan:

$$\begin{aligned} S_1 &= \text{ den del som bestäms av planet } z+2y+3z=6, \\ S_2 &= \text{ den lodräta väggen i } xz\text{-planet}, \\ S_3 &= \text{ det vågrätta golvet i } xy\text{-planet}, \\ S_4 &= \text{ den lodräta väggen i } yz\text{-planet}. \end{aligned}$$

och sedan dela upp flödesintegralen i fyra stycken vanliga dubbelintegraler:

$$\oiint_S \mathbf{F}\cdot\hat{\mathbf{n}}\ \mathrm{d}S = \iint_{S_1} \mathbf{F}\cdot\hat{\mathbf{n}}_1\ \mathrm{d}S + \iint_{S_2} \mathbf{F}\cdot\hat{\mathbf{n}}_2\ \mathrm{d}S + \iint_{S_3} \mathbf{F}\cdot\hat{\mathbf{n}}_3\ \mathrm{d}S + \iint_{S_4} \mathbf{F}\cdot\hat{\mathbf{n}}_4\ \mathrm{d}S$$

Dessa fyra integraler går att beräkna var för sig, genom att för varje yta $i = 1, 2, 3, 4$ ta fram ett uttryck för normalen $\hat{\mathbf{n}}_i$, beräkna skalärprodukten $\mathbf{F}\cdot\hat{\mathbf{n}}_i$, hitta en bra parameteriseirng av ytan S_i, beräkna volymelementet $\mathrm{d}S$ på ytan S_i och slutligen beräkna integralen

$$\iint_{S_i} \mathbf{F}\cdot\hat{\mathbf{n}}_i\ \mathrm{d}S.$$

för alla fyra ytor S_i. Det totala flödet är som sagt summan av dessa fyra integraler.

Ett betydligt snabbare sätt är att använda Gauss sats:

$$\oiint_S \mathbf{F}\cdot\hat{\mathbf{n}}\ \mathrm{d}S = \iiint_T \nabla\cdot\mathbf{F}\ \mathrm{d}V = \Big[\nabla\cdot\mathbf{F} = 1\Big] = \iiint_T \mathrm{d}V = \mathrm{vol}(T)$$

Volymen av en tetraeder är $\frac{1}{3} * \text{basarea} * \text{höjd}$, vilket i vårt fall blir $\frac{1}{3} * \frac{6*3}{2} * 2 = 6$. Alltså är

$$\boxed{\oiint_S \mathbf{F}\cdot\hat{\mathbf{n}}\ \mathrm{d}S = 6}$$

Problem 15.6.4.

Bestäm flödet av vektorfältet $\mathbf{F} = y\mathbf{i} + z\mathbf{k}$ ut ur den solida konen $0 \leq z \leq 1 - \sqrt{x^2 + y^2}$.

Lösning: Låt S_1 vara den koniska ytan $z = 1 - \sqrt{x^2 + y^2}$ och låt S_2 vara basdisken $z = 0$. Flödet av $\mathbf{F}$ ut ur den solida konen är

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{N}} = \iint_{S_1} \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{N}} + \iint_{S_2} \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{N}}$$

och låt oss börja med att beräkna integralen över S_1. Där finner vi normalen

$$\mathbf{N} = -\frac{\partial z}{\partial x}\mathbf{i} - \frac{\partial z}{\partial y}\mathbf{j} + \mathbf{k} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}\mathbf{i} + \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}\mathbf{j} + \mathbf{k},$$

vilket efter normalisering ger

$$\hat{\mathbf{N}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}\mathbf{i} + \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}\mathbf{j} + \mathbf{k} \right).$$

Vi får även areaelementet

$$\mathrm{d}S = \sqrt{\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 + 1}\ \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \sqrt{2}\ \mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

Notera att normaliseringsfaktorn och konstanten framför $\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ tar ut varandra:

$$\hat{\mathbf{N}}\ \mathrm{d}S = \frac{\mathbf{N}}{\sqrt{\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 + 1}} \sqrt{\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 + 1}\ \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \mathbf{N}\ \mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

Flödet genom den första ytan S_1 blir därför

$$\begin{aligned}
\iint_{S_1} \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{N}}\ \mathrm{d}S &= \iint_{x^2+y^2 \leq 1} \left(\frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}} + \underbrace{1 - \sqrt{x^2 + y^2}}_{=z} \right) \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \begin{bmatrix} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \\ \mathrm{d}x\mathrm{d}y = r\ \mathrm{d}r\mathrm{d}\theta \end{bmatrix} = \\
&= \int_0^{2\pi} \int_0^1 r^2 \cos\theta \sin\theta + r - r^2\ \mathrm{d}r\mathrm{d}\theta = \\
&= \int_0^1 r^2\ \mathrm{d}r \underbrace{\int_0^{2\pi} \cos\theta \sin\theta\ \mathrm{d}\theta}_{=0} + 2\pi \int_0^1 r - r^2\ \mathrm{d}r = 0 + \pi - \frac{2\pi}{3} = \frac{\pi}{3}.
\end{aligned}$$

Flödet genom basdisken S_2 är enklare att beräkna, ty $z = 0$ vilket ger normalvektorn $\hat{\mathbf{N}} = -\mathbf{k}$:

$$\iint_{S_2} \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{N}}\ \mathrm{d}S = \iint_{S_2} z\ \mathrm{d}S = \left[z = 0 \right] = 0.$$

Det totala flödet ut ur konen är således $\frac{\pi}{3}$.

Problem 15.6.10.

Bestäm flödet av vektorfältet $\mathbf{F} = 2x\mathbf{i}+y\mathbf{j}+z\mathbf{k}$ upp ur den yta S som ges av $\mathbf{r} = u^2v\mathbf{i}+uv^2\mathbf{j}+v^3\mathbf{k}$.

Lösning: När vi arbetar med parameteriska ytor som definieras av en funktion $\mathbf{r}$ så ges yt-elementet av

$$\hat{\mathbf{N}}\ \mathrm{d}S = \mathbf{N}\ \mathrm{d}u\mathrm{d}v,$$

där normalvektorn denna gång är

$$\mathbf{N} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 2uv & v^2 & 0 \\ u^2 & 2uv & 3v^2 \end{vmatrix} = 3v^4\mathbf{i} - 6uv^3\mathbf{j} + 3u^2v^2\mathbf{k}.$$

Se texten under Definition 5 på sida 873 i boken för en bra förklaring. Idén är att vektorerna $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}$ och $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}$ löper parallellt med ytan och är vinkelräta mot varandra, och kryssprodukten av två vektorer är alltid vinkelrät mot båda två så $\mathbf{N} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}$ måste peka ut ur ytan.

Variablerna x, y, z är koordinaterna hos $\mathbf{r}$, det vill säga

$$x(u,v) = u^2v, \qquad y(u,v) = uv^2, \qquad z(u,v) = v^3,$$

så det följer att

$$\begin{aligned} \iint_S \mathbf{F}\cdot\hat{\mathbf{N}}\ \mathrm{d}S &= \int_0^1\int_0^1 \left(2u^2v\mathbf{i} + uv^2\mathbf{j} + v^3\mathbf{k}\right)\cdot\left(3v^4\mathbf{i} - 6uv^3\mathbf{j} + 3u^2v^2\mathbf{k}\right)\ \mathrm{d}u\mathrm{d}v = \\ &= \int_0^1\int_0^1 6u^2v^5 - 6u^2v^5 + 3u^2v^5\ \mathrm{d}u\mathrm{d}v = \\ &= 3\int_0^1 u^2\ \mathrm{d}u \int_0^1 v^5\ \mathrm{d}v = 3 * \frac{1}{3} * \frac{1}{6} = \frac{1}{6}. \end{aligned}$$

Problem 16.1.3.

Beräkna div $\mathbf{F}$ och curl $\mathbf{F}$ av

$$\mathbf{F} = y\mathbf{i} + z\mathbf{j} + x\mathbf{k}.$$

Lösning: Kom ihåg att div och curl definieras av

$$\text{div } \mathbf{F} = \boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{F} = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z},$$

respektive

$$\text{curl } \mathbf{F} = \boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z} \right) \mathbf{i} - \left(\frac{\partial F_3}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial z} \right) \mathbf{j} + \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) \mathbf{k}.$$

I vårt fall finner vi att

$$\text{div } \mathbf{F} = \frac{\partial y}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} + \frac{\partial x}{\partial z} = 0,$$

respektive

$$\text{curl } \mathbf{F} = \left(\frac{\partial x}{\partial y} - \frac{\partial z}{\partial z} \right) \mathbf{i} - \left(\frac{\partial x}{\partial x} - \frac{\partial y}{\partial z} \right) \mathbf{j} + \left(\frac{\partial z}{\partial x} - \frac{\partial y}{\partial y} \right) \mathbf{k} = -\mathbf{i} - \mathbf{j} - \mathbf{k}.$$

Problem 16.1.5.

Beräkna div $\mathbf{F}$ och curl $\mathbf{F}$ av

$$\mathbf{F} = x\mathbf{i} + x\mathbf{k}$$

Lösning: Divergensen är enkel att beräkna:

$$\text{div } \mathbf{F} = \nabla \cdot \mathbf{F} = \frac{\partial}{\partial x}x + \frac{\partial}{\partial y}0 + \frac{\partial}{\partial z}x = 1.$$

Att beräkna curl $\mathbf{F}$ kräver lite mer arbete men är inte en svår uppgift:

$$\text{curl } \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x & 0 & x \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial}{\partial y}x - \frac{\partial}{\partial z}0\right)\mathbf{i} - \left(\frac{\partial}{\partial x}x - \frac{\partial}{\partial z}x\right)\mathbf{j} + \left(\frac{\partial}{\partial x}0 - \frac{\partial}{\partial y}x\right)\mathbf{k} = -\mathbf{j}.$$

Problem 16.1.9.

Beräkna div **F** och curl **F** av

$$\mathbf{F}(r,\theta) = r\mathbf{i} + \sin\theta\mathbf{j}.$$

Lösning: Vi börjar med att skriva om r och $\sin\theta$ som funktioner av x och y:

$$r^2 = x^2 + y^2 \qquad \Rightarrow \qquad r = \sqrt{x^2+y^2},$$

samt

$$y = r\sin\theta \qquad \Rightarrow \qquad \sin\theta = \frac{y}{r} = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}},$$

vilket låter oss beräkna följande derivator:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial r}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x}\sqrt{x^2+y^2} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{x}{r} = \cos\theta, \\
\frac{\partial r}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial y}\sqrt{x^2+y^2} = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{y}{r} = \sin\theta, \\
\frac{\partial \sin\theta}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x}\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} = -\frac{xy}{\left(x^2+y^2\right)^{3/2}} = -\frac{r\cos\theta r\sin\theta}{r^3} = -\frac{\cos\theta\sin\theta}{r}, \\
\frac{\partial \sin\theta}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial y}\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} - \frac{y^2}{\left(x^2+y^2\right)^{3/2}} = \frac{1}{r} - \frac{r^2\sin^2\theta}{r^3} = \frac{1-\sin^2\theta}{r} = \frac{\cos^2\theta}{r}
\end{aligned}$$

Vi kan nu beräkna divergensen:

$$\operatorname{div}\mathbf{F} = \boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{F} = \frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial \sin\theta}{\partial y} = \cos\theta + \frac{\cos^2\theta}{r}$$

Rotationen ges på liknande sätt av

$$\operatorname{curl}\mathbf{F} = \boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ r & \sin\theta & 0 \end{vmatrix} = -\frac{\partial\sin\theta}{\partial z}\mathbf{i} + \frac{\partial r}{\partial z}\mathbf{j} + \left(\frac{\partial \sin\theta}{\partial x} - \frac{\partial r}{\partial y}\right)\mathbf{k} = \left(-\frac{\cos\theta\sin\theta}{r} - \sin\theta\right)\mathbf{k}.$$

Problem 16.1.X.

Låt oss illustrera varför curl $\mathbf{F} = \nabla \times \mathbf{F}$ kallas just curl, vad det har med rotation att göra.

Föreställ er en myra sittandes på en LP-skiva som roterar 30 varv per minut. Låt

$$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} = r\cos\theta\mathbf{i} + r\sin\theta\mathbf{j}$$

vara myrans position och eftersom myran sitter still är radien r konstant, men vinkeln θ ändras i takt med att skivan roterar. Vi har implicit antagit att skivan ligger i xy-planet med mittpunkt i origo och roterar kring z-axeln.

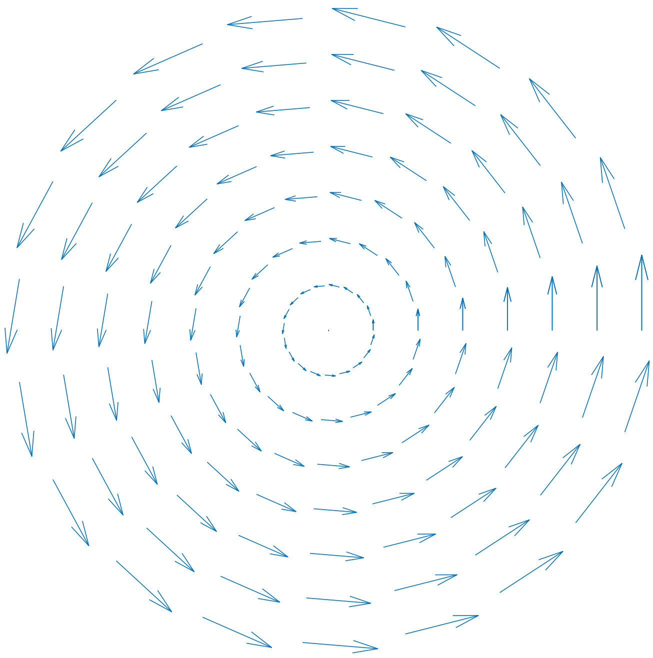
Rotationshastigheten kan beräknas som

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta} = -r\sin\theta\mathbf{i} + r\cos\theta\mathbf{j} = -y\mathbf{i} + x\mathbf{j}$$

och om vi till varje punkt $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$ associerar hastighetsvektorn $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta} = -y\mathbf{i} + x\mathbf{j}$ så får vi ett vektorfält som beskriver rotationshastigheten:

$$\mathbf{F}(x, y) = -y\mathbf{i} + x\mathbf{j}$$

Nedanstående figur visar hur detta fält ser ut.



Vi ser tydligt att fältet beskriver en rotation kring z-axeln, precis som förväntat. Notera att hastigheterna blir större och större (pilarna blir längre och längre) ju längre bort vi kommer från skivans mittpunkt origo - med andra ord har myran en högre rotationshastighet om den sätter sig långt ut på skivan än om den sitter långt in på skivan. Detta beror förstås på att när skivan roterar ett varv så färdas myran en längre sträcka om den sitter långt ut på skivan än om den sitter långt in, men ett varv tar 2 sekunder oavsett var myran sitter, så rotationshastigheten måste vara högre längre ut på skivan.

Låt oss nu beräkna curl **F**.

$$\operatorname{curl}\mathbf{F} = \nabla \times \mathbf{F} = \det\begin{bmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ -y & x & 0 \end{bmatrix} = \left(0 - \frac{\partial x}{\partial z}\right)\mathbf{i} - \left(0 + \frac{\partial y}{\partial z}\right)\mathbf{j} + \left(\frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial y}\right)\mathbf{k} = 2\mathbf{k}.$$

Fältets curl pekar alltså i den positiva z-riktningen; fältets curl ligger längsmed den axel som fältet roterar kring.

Problem 16.2.16.

Hitta en vektorpotential till

$$\mathbf{F}(x,y) = -y\mathbf{i} + x\mathbf{j}$$

Lösning: Observera att vektorfältet $\mathbf{F}$ ej är konservativt, alltså kan vi inte finna en skalär potential ϕ. Däremot existerar en vektorpotential $\mathbf{A}$ sådan att $\mathbf{F} = \text{curl } \mathbf{A} = \boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{A}$. Detta innebär att

$$-y\mathbf{i} + x\mathbf{j} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_1 & A_2 & A_3 \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial A_3}{\partial y} - \frac{\partial A_2}{\partial z}\right)\mathbf{i} - \left(\frac{\partial A_3}{\partial x} - \frac{\partial A_1}{\partial z}\right)\mathbf{j} + \left(\frac{\partial A_2}{\partial x} - \frac{\partial A_1}{\partial y}\right)\mathbf{k}$$

Vi får således tre ekvationer:

$$\frac{\partial A_3}{\partial y} - \frac{\partial A_2}{\partial z} = -y \tag{7}$$

$$\frac{\partial A_3}{\partial x} - \frac{\partial A_1}{\partial z} = -x \tag{8}$$

$$\frac{\partial A_2}{\partial x} - \frac{\partial A_1}{\partial y} = 0 \tag{9}$$

En lösning kommer inte vara unik, vi kan alltid lägga till $\nabla\phi$ till $\mathbf{A}$ för godtycklig funktion ϕ och vi får ändå samma vektorfält $\mathbf{F}$:

$$\mathbf{F} = \text{curl } \mathbf{A} \qquad \Rightarrow \qquad \text{curl}(\mathbf{A} + \nabla\phi) = \text{curl } \mathbf{A} + \underbrace{\text{curl } \nabla\phi}_{=0} = \mathbf{F}$$

Låt oss anta att det finns en lösning med $A_2 = 0$. Vi kan då integrera ekvation (7):

$$\frac{\partial A_3}{\partial y} - \underbrace{\frac{\partial A_2}{\partial z}}_{=0} = -y \qquad \Rightarrow \qquad \int \frac{\partial A_3}{\partial y} \,\mathrm{d}y = -\int y \,\mathrm{d}y = -\frac{y^2}{2} + C(x,z).$$

Låt oss anta att $C(x,z) = 0$; vi vet inte om detta antagande är rättfärdigat men vi chansar och ser om detta förenklande antagande hjälper oss hitta en lösning på problemet. I så fall har vi

$$A_3 = -\frac{y^2}{2}, \qquad A_2 = 0$$

och vi måste nu bestämma A_1. Låt oss därför studera ekvation (8):

$$\frac{\partial A_1}{\partial z} - \underbrace{\frac{\partial A_3}{\partial x}}_{=0} = x \qquad \Rightarrow \qquad \int \frac{\partial A_1}{\partial z} \,\mathrm{d}z = \int x \,\mathrm{d}z = xz + D(x,y)$$

Men vi vet från ekvation (9) att

$$\underbrace{\frac{\partial A_2}{\partial x}}_{=0} - \frac{\partial A_1}{\partial y} = 0, \qquad \text{så} \qquad \frac{\partial A_1}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(xz + D(x,y)) = 0.$$

Det följer att $\frac{\partial D}{\partial y} = 0$, så vi väljer $D(x,y) = 0$. Vi har således funnit en vektorpotential för $\mathbf{F}$:

$$\boxed{\mathbf{A} = xz\mathbf{i} - \frac{y^2}{2}\mathbf{k}}$$

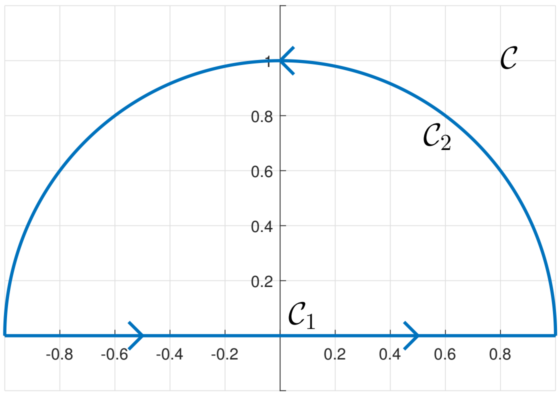
Problem 16.3.1.

Beräkna linjeintegralen

$$I = \oint_{\mathcal{C}} (\sin x + 3y^2)\ \mathrm{d}x + (2x - e^{-y^2})\ \mathrm{d}y$$

där $\mathcal{C}$ är kurvan som löper ett varv moturs kring halvdisken

$$D = \big\{(x,y)\ \big|\ x^2 + y^2 \le 1,\ y \ge 0\big\}$$



Lösning: Denna integral är jobbig att beräkna med vanliga linjeintegral-metoder, då vi måste parameterisera $\mathcal{C}_1$ & $\mathcal{C}_2$ och så vidare. Det är bättre att använda Greens formel, som säger att

$$\iint_D (\mathrm{curl}\ \mathbf{F}) \cdot \mathbf{n}\ \mathrm{d}A = \oint_{\partial D = \mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r},$$

så vi kan beräkna dubbelintegralen i vänsterledet istället för kurvintegalen i högerledet. Eftersom disken D ligger i xy-planet pekar normalen rakt uppåt, $\hat{\mathbf{n}} = \mathbf{k}$, så vi behöver bara beräkna den sista komponentet av rotationen eftersom de två första komponenterna försvinner när vi tar skalärprodukten curl $\mathbf{F} \cdot \mathbf{k}$. Alltså:

$$\mathrm{curl}\ \mathbf{F} \cdot \mathbf{k} = \frac{\partial F_1}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(2x - e^{-y^2}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\sin x + 3y^2\right) = 2 - 6y$$

Vi ska med andra ord beräkna dubbelintegralen

$$\begin{aligned}
\iint_D 2 - 6y\ \mathrm{d}A &= \int_0^\pi\ \mathrm{d}\theta \int_0^a (2 - 6r\sin\theta) r\ \mathrm{d}r = \\
&= 2\int_0^\pi\ \mathrm{d}\theta \int_0^a r\ \mathrm{d}r - 6\int_0^\pi \sin\theta\ \mathrm{d}\theta \int_0^a r^2\ \mathrm{d}r = \\
&= \pi a^2 + 6\frac{a^3}{3}\Big[\cos\theta\Big]_0^\pi = \\
&= \pi a^2 + 2a^3\big(-1-1\big) = \\
&= \pi a^2 - 4a^3.
\end{aligned}$$

Problem 16.4.4

Använd Gauss divergenssats för att beräkna flödet av fältet

$$\mathbf{F} = x^3\mathbf{i} + 3yz^2\mathbf{j} + (3y^2z + x^2)\mathbf{k}$$

ut ur den sfär S som definieras av ekvationen

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2$$

Lösning: Flödet ut ur sfären ges av ytintegralen

$$\oiint_S \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{N}} \, \mathrm{d}S$$

och det vore nog inte omöjligt att beräkna ytintegralen direkt, eftersom sfären är en snäll yta som är lätt att arbeta med. Det är dock ännu enklare att använda Gauss divergenssats:

$$\begin{aligned}
\oiint_S \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{N}} \, \mathrm{d}S = \iiint_B \nabla \cdot \mathbf{F} \, \mathrm{d}V &= 3 \iiint_D (x^2 + y^2 + z^2) \, \mathrm{d}V = \\
&= 3 \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta \int_0^{\pi} \sin\phi \, \mathrm{d}\phi \int_0^a r^4 \, \mathrm{d}r = \\
&= 3 * 2\pi * \Big[-\cos\phi \Big]_0^{\pi} * \frac{a^5}{5} = \frac{12}{5}\pi a^5,
\end{aligned}$$

där B är den slutna bollen $x^2 + y^2 + z^2 \leq a^2$.

Kompletterande uppgifter

Problem K5.

Parameterisera på två olika sätt den kurva som följer ellipsen $x^2 + 4y^2 = 9$ i första kvadranten från $(3, 0)$ till $(1, \sqrt{2})$.

Lösning:

1. En möjlig parameterisering är att sätta $x = t$ och försöka skriva y som en funktion av t:

$$t^2 + 4y^2 = 9 \qquad \Rightarrow \qquad 4y^2 = 9 - t^2 \qquad \Rightarrow \qquad y^2 = \frac{9 - t^2}{4} \qquad \Rightarrow \qquad y = \pm\frac{\sqrt{9 - t^2}}{2}.$$

Vi är bara intresserade av första kvadranten där $x \geq 0$ och $y \geq 0$, så vi slänger bort de negativa y-värdena och anländer vid vår första parameterisering:

$$x = t, \qquad y = \frac{\sqrt{9 - t^2}}{2} \tag{10}$$

Låt oss kontrollera att detta är en korrekt parameterisering, genom att undersöka om kurvan $(x(t), y(t))$ faktiskt passerar genom de två punkterna $(3, 0)$ och $(1, \sqrt{2})$. Indeed, det t som är associerat med x-koordinaten $x = 1$ är $t = 1$, så motsvarande y-koordinat är

$$y = \frac{\sqrt{9 - 1^2}}{2} = \frac{\sqrt{8}}{2} = \frac{2\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2},$$

vilket innebär att punkten $(1, \sqrt{2})$ ligger på kurvan som bestäms av ekvation (10). Det t som är associerat med x-koordinaten $x = 3$ är $t = 3$, och motsvarande y-koordinat är

$$y = \frac{\sqrt{9 - 3^3}}{2} = \frac{\sqrt{0}}{2} = 0,$$

så punkten $(3, 0)$ ligger också på kurvan. Kurvsegmentet mellan $(3, 0)$ och $(1, \sqrt{2})$ kan alltså parameteriseras som

$$\boxed{x = t, \qquad y = \frac{\sqrt{9 - t^2}}{2}, \qquad 1 \leq t \leq 3}$$

2. Ett annat sätt att parameterisera kurvan är att använda polära koordinater:

$$\begin{cases} x = 3\cos t \\ y = \frac{3}{2}\sin t \end{cases},$$

där faktorerna 3 och $\frac{3}{2}$ har valts så att

$$x^2 + 4y^2 = (3\cos t)^2 + 4\left(\frac{3}{2}\sin t\right)^2 = 9\cos^2 t + 4\frac{9}{4}\sin^2 t = 9\left(\cos^2 t + \sin^2 t\right) = 9.$$

Låt oss nu hitta de värden t_0 och t_1 på variabeln t som ger

$$(x(t_0), y(t_0)) = (3\cos t_0, (3/2)\sin t_0) = (3, 0), \tag{11}$$

respektive

$$(x(t_1), y(t_1)) = (3\cos t_1, (3/2)\sin t_1) = (1, \sqrt{2}). \tag{12}$$

Att hitta t_0 är en enkel uppgift: eftersom vi vill att $\cos t_0 = 1$ och $\sin t_0 = 0$ så fungerar $t = 0$. Att hitta t_1 som uppfyller ekvation (12) är däremot lite klurigare. Vi letar upp ett t_1 som uppfyller $x(t_1) = 1$:

$$x(t_1) = 1 \quad \Longleftrightarrow \quad 3\cos t_1 = 1 \quad \Longleftrightarrow \quad \cos t_1 = \frac{1}{3} \quad \Rightarrow \quad t_1 = \arccos\frac{1}{3}.$$

Motsvarande y-värde blir då

$$y(t_1) = \frac{3}{2}\sin\left(\arccos\frac{1}{3}\right) = [\text{WolframAlpha}] = \frac{3}{2}\frac{2\sqrt{2}}{3} = \sqrt{2},$$

som förväntat. Kurvsegmentet mellan $(3, 0)$ och $(1, \sqrt{2})$ kan alltså parameteriseras som

$$\boxed{x = 3\cos t, \qquad y = \frac{3}{2}\sin t, \qquad 1 \le t \le \arccos\frac{1}{3}}$$

Mittenta 2014-09-27

Problem 1.

1. Låt

$$f(x,y) = e^{x\cos y}$$

Bestäm ekvationen för tangentplanet till ytan $z = f(x,y)$ i punkten $(0,\pi,1)$.

Lösning: Den givna punkten innehåller tre koordianter och ska tolkas som en punkt på grafen av $f(x,y)$. De två första koordinaterna $(0,\pi)$ utgör alltså den punkt (a,b) som vi linjariserar kring och den tredje koordinaten är funktionsvärdet i punkten, dvs

$$1 = f(0,\pi) = f(a,b).$$

Tangentplanet i $(0,\pi)$ ges av ekvationen

$$z = f(0,\pi) + f_1(0,\pi)(x-0) + f_2(0,\pi)(x-\pi),$$

och vi vet redan att $f(0,\pi) = 1$, så låt oss börja med att derivera funktionen.

$$f_1(x,y) = \frac{\partial}{\partial x} e^{x\cos y} = \cos y e^{x\cos y}, \qquad f_2(x,y) = \frac{\partial}{\partial y} e^{x\cos y} = -x\sin y e^{x\cos y},$$

och när vi sätter in punkten $(0,\pi)$ i dessa uttryck så får vi

$$f_1(0,\pi) = -1, \qquad \text{respektive} \qquad f_2(0,\pi) = 0$$

Tangentplanet blir därför

$$z = 1 - 1*(x-0) + 0*(y-\pi) = 1-x$$

(b) Bestäm $\frac{\partial f(x,y)}{\partial s}$ samt $\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial s^2}$ där

$$f(x,y) = e^{xy}, \qquad x = s^2 t, \qquad y = \sin(s)t^2.$$

Lösning: Det finns två vanliga sätt att lösa den här uppgiften: antingen kan vi sätta in uttrycken för x och y direkt i funktionen och derivera med avseende på s direkt, eller så kan vi använda kedjeregeln. På tentan behöver ni förstås bara välja en approach, vilken ni vill, men för tydlighets skull kommer jag visa båda metoderna.

Metod 1: Kedjeregeln.

Det är enklast om vi börjar med att beräkna derivatorna och andraderivatorna med avseende på x och y. Låt oss även skriva f_x istället för f_1, f_y istället för f_2, och så vidare för att förtydliga vilka variabler vi deriverar med avseende på.

$$f_x = ye^{xy}, \qquad f_y = xe^{xy}, \tag{13}$$

$$f_{xx} = y^2 e^{xy}, \qquad f_{xy} = f_{yx} = (1+xy)e^{xy}, \qquad f_{yy} = x^2 e^{xy}. \tag{14}$$

En direkt tillämpning av kedjeregeln ger oss förstaderivatan

$$\frac{\partial f}{\partial s} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s} = f_x \frac{\partial x}{\partial s} + f_y \frac{\partial s}{\partial y} = 2stf_x + \cos(s)t^2 f_y$$

och andraderivatan

$$\frac{\partial^2 f}{\partial s^2} = \frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{\partial f}{\partial s}\right) = \frac{\partial}{\partial s}\big[2stf_x + \cos(s)t^2 f_y\big] = 2t\frac{\partial}{\partial s}\big[sf_x\big] + t^2\frac{\partial}{\partial s}\big[\cos(s)f_y\big] \tag{15}$$

nu behöver vi tillämpa både produktregeln och kedjeregeln. Först har vi

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial s}\big[sf_x\big] &= 1 * f_x + s * \frac{\partial f_x}{\partial s} = \\
&= f_x + s * \left(\frac{\partial f_x}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial f_x}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s}\right) = \\
&= f_x + s\Big(2stf_{xx} + \cos(s)t^2 f_{xy}\Big) = \\
&= f_x + 2s^2tf_{xx} + \cos(s)st^2 f_{xy}
\end{aligned}$$

och på samma sätt finner vi

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial s}\big[\cos(s)f_y\big] &= -\sin(s)f_y + \cos(s)\frac{\partial f_y}{\partial s} = \\
&= -\sin(s)f_y + \cos(s)\left(\frac{\partial f_y}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial f_y}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s}\right) = \\
&= -\sin(s)f_y + \cos(s)\Big(2stf_{xy} + \cos(s)t^2 f_{yy}\Big) = \\
&= -\sin(s)f_y + 2st\cos(s)f_{xy} + \cos(s)^2 t^2 f_{yy}
\end{aligned}$$

Vi kan nu sätta dessa derivator i uttrycket (15) för att få andraderivatan

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 f}{\partial s^2} &= 2t\big[f_x + 2s^2tf_{xx} + \cos(s)st^2 f_{xy}\big] + t^2\big[-\sin(s)f_y + 2st\cos(s)f_{xy} + \cos(s)^2t^2f_{yy}\big] = \\
&= 2tf_x - \sin(s)t^2 f_y + 4s^2t^2f_{xx} + 4st^3\cos(s)f_{xy} + \cos(s)^2t^4f_{yy}
\end{aligned}$$

Eftersom vi redan har beräknat värdena på f_x, f_y, och så vidare i ekvationerna (13) och (14), så kan vi helt enkelt sätta in dem. Vi finner då att

$$\frac{\partial^2 f}{\partial s^2} = e^{xy}\Big[2ty - \sin(s)t^2x + 4s^2t^2y^2 + 4st^3\cos(s)\big(1 + xy\big) + \cos(s)^2t^4x^2\Big]$$

Till sist skulle vi kunna sätta in uttrycken för x och y i termer av s och t, men vi hoppar det.

Metod 2:

Den andra metoden går ut på att mata in uttrycken för x och y redan innan vi börjar derivera:

$$f(x,y) = f(x(s,t),y(s,t)) = e^{s^2 t * \sin(s) t^2} = e^{\sin(s) s^2 t^3}$$

Då har vi enligt envariabel-kedjeregeln samt produktregeln att

$$\frac{\partial f}{\partial s} = t^3 \left[s^2 \cos(s) + 2s \sin(s) \right] e^{\sin(s) s^2 t^3}$$

Ytterligare tillämpning av samma två regler ger så småningom

$$\frac{\partial^2 f}{\partial s^2} = t^3 e^{\sin(s) s^2 t^3} \left[\big(2s\cos(s) - s^2 \sin(s)\big) + \big(2s\cos(s) + 2\sin(s)\big) + t^3 \big(s^2\cos(s) + 2s\sin(s)\big)^2 \right] =$$
$$= t^3 e^{\sin(s) s^2 t^3} \left[t^3 \big(s^2\cos(s) + 2s\sin(s)\big)^2 + 4s\cos(s) + (2 - s^2)\sin(s) \right]$$

I det här fallet var metod 2 betydligt enklare än metod 1 (kedjeregeln), för att funktionen f inte var så komplicerad när vi matade in uttrycken för x och y i termer av s och t. När man arbetar med mer komplicerade funktioner, med längre uttryck, kan kedjeregeln vara kung. Så vilken metod man använder beror på situationen. Kedjeregeln resulterar ofta i *många relativt lätta* beräkningar medan metod 2 resulterar i *ett fåtal relativt jobbiga* beräkningar.

(c) Betrakta kurvan som ges av $\mathbf{r}(t) = \frac{1}{2}t^2\mathbf{i} + \frac{1}{3}t^3\mathbf{j}$ för $0 \leq t \leq 1$. Antag att parameteriseringen beskriver rörelsen hos en partikel. Bestäm partikelns hastighet (velocity) som en funktion av t, och bestäm sedan kurvans längd.

Lösning: Hastigheten ges av derivatan med avseende på t:

$$\mathbf{r}'(t) = t\mathbf{i} + t^2\mathbf{j},$$

och kurvans längd ges av

$$\int_0^1 \|\mathbf{r}'(t)\| \, \mathrm{d}t = \int_0^1 \sqrt{t^2 + t^4} \, \mathrm{d}t = \int_0^1 t\sqrt{1 + t^2} \, \mathrm{d}t$$

Detta är en standardintegral som bestäms via substitutionen $u = 1 + t^2$. Längden blir således

$$\int_0^1 t\sqrt{1+t^2} \, \mathrm{d}t = \begin{bmatrix} u = 1 + t^2 \\ \mathrm{d}u = 2t \, \mathrm{d}t \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\int_1^2 \sqrt{u} \, \mathrm{d}u = \frac{1}{2}\left[\frac{2}{3}u^{3/2}\right]_1^2 = \frac{1}{3}\left(2\sqrt{2} - 1\right).$$

Problem 2

Låt $f(x,y) = x + y + \frac{8}{xy}$ med definitionsmängd $x > 0$, $y > 0$.

(a) Bestäm den unika kritiska punkten till f och avgör huruvida den är ett lokalt maximum, ett lokalt minimum eller ingetdera.

Lösning: Vi finner den kritiska punkten genom att undersöka var gradienten försvinner:

$$\begin{cases} 0 = f_x = 1 - \frac{8}{x^2 y} & \Rightarrow \quad x^2 y = 8 \\ 0 = f_y = 1 - \frac{8}{xy^2} & \Rightarrow \quad xy^2 = 8 \end{cases}$$

och tillsammans ger dessa ekvationer att $x = y = 2$, så den unika kritiska punkten är $(2, 2)$.

För att klassificera punkten använder vi oss av Hessianen:

$$H(x, y) = \begin{bmatrix} f_{11}(x, y) & f_{12}(x, y) \\ f_{21}(x, y) & f_{22}(x, y) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{16}{x^3 y} & \frac{8}{x^2 y^2} \\ \frac{8}{x^2 y^2} & \frac{16}{x y^3} \end{bmatrix}$$

I punkten $(2, 2)$ blir determinanten

$$\det H(2, 2) = \det \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix} = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4} > 0,$$

och det första elementet $f_{11}(2, 2) = 1$ är positivt, så punkten $(2, 2)$ är ett lokal minima.

(b) Bestäm de största och minsta värdena som antas av f i det kvadratiska området $1 \leq x \leq 3$, $1 \leq y \leq 3$.

Lösning: Punkten $(2, 2)$ ligger innanför området och är därför en kandidat till ett minimum. Vi noterar att $f(2, 2) = 6$. Näst undersöker vi randen, som består av fyra sträckor: två horisontella och två vertikala. Notera dock att f är symmetrisk i x och y, det vill säga att $f(x, y) = f(y, x)$, så det räcker att undersöka de horisontella sträckorna.

Längs sträckan $x = 1$ har vi $f(1, y) = 1 + y + \frac{8}{y} =: g(y)$, säg. Vi har

$$g'(y) = 1 - \frac{8}{y^2},$$

så det finns en kritisk punkt vid $y = \sqrt{8}$. Vi finner att

$$g(\sqrt{8}) = 1 + \sqrt{8} + \frac{8}{\sqrt{8}} = 1 + 2\sqrt{8}.$$

Ändpunkterna är vid $y = 1$ och $y = 3$ och där har vi $g(1) = 10$ och $g(3) = 20/3$.

Längs sträckan $x = 3$ har vi $f(3, y) = 3 + y + \frac{8}{3y} := h(y)$, säg. Vi har

$$h'(y) = 1 - \frac{8}{3y^2},$$

så det finns en kritisk punkt vid $y = \sqrt{8/3}$. Vi finner att

$$h(\sqrt{8/3}) = 3 + \sqrt{8/3} + \frac{8}{3\sqrt{8/3}} = 3 + 2\sqrt{8/3}.$$

Ändpunkterna är vid $y = 1$ och $y = 3$ där vi har $h(1) = 20/3$ och $h(3) = 62/9$.

Totalt har vi alltså sju kandidatvärden för max och min, nämligen

$$6, 1 + 4\sqrt{2}, 10, 20/3, 3 + 2\sqrt{8/3}, 20/3, 62/9.$$

Man kan kontrollera att 6 är minst och 10 är störst.

(c) Bestäm Taylorpolynomet av grad 2 i punkten $(1, 1)$. Ange svaret på formen

$$f(1 + h, 1 + k) \approx \cdots$$

Lösning: Funktionen är som sagt

$$f(x,y) = x + y + \frac{8}{xy}.$$

Formeln för Taylorpolynomet av grad 2 lyder

$$f(1+h,1+k) \approx f(1,1)+f_1(1,1)h+f_2(1,1)k+\frac{1}{2}\Big[f_{11}(1,1)h^2+2f_{12}f(1,1)hk+f_{22}(1,1)k^2\Big]$$

så låt oss beräkna alla dessa derivator och andraderivator. Själva deriveringen är en lätt uppgift som vi dessutom redan har utfört i tidigare deluppgifter, så det är lätt att få fram värdena

$$\begin{array}{lll} f(1,1) = 10, & f_1(1,1) = -7, & f_2(1,1) = -7, \\ f_{11}(1,1) = 16, & f_{12}(1,1) = 8, & f_{22}(1,1) = 16, \end{array}$$

så Taylorpolynomet blir

$$f(1+h,1+k) \approx 10 - 7(h+k) + 8(h^2 + hk + k^2).$$

Sluttenta 2014-09-27

Godkäntdelen: del 1

Problem 1

Till nedanstående uppgifter skall korta lösningar redovisas, samt svar anges, på separat skrivpapper.

(a) (i) Ange om följande påstående är sant eller falskt.

Påstående: Komplementet till en sluten boll är en öppen mängd.

Svar: Sant.

(ii) Låt $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ vara en differentierbar funktion. Vilket eller vilka av följande påståenden är sanna? Ni får ringa in *max tre alternativ* (bokstäver); för fler än tre angivna alternativ blir det 0 poäng. Varje rätt svar ger 0.5p.

A Om f har kontinuerliga partiella derivator i en omgivning till (a, b) så är f differentierbar i (a, b).

Svar: Sant.

B Om f:s partiella derivator existerar i (a, b) så är f differentierbar i (a, b).

Svar: Falskt.

C Gradienten kan ses som en flervariabel-analog till derivatan av en funktion $f(x)$.

Svar: Sant.

D Hessianen kan ses som en flervariabel-analog till derivatan av en funktion $f(x)$.

Svar: Falskt. Däremot kan Hessianen ses som en flervariabel-analog till andraderivatan av en funktion $f(x)$.

E Om U är en öppen mängd och begränsad mängd i $\mathbb{R}^2$ så existerar nödvändigtvis globalt max i U.

Svar: Falskt. Tag till exempel funktionen

$$f(x, y) = x$$

och låt U vara den öppna bollen

$$U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 1\}$$

Denna funktion har inte ens ett *lokalt* maximum i mängden U, än mindre ett globalt maximum, eftersom vi kan komma hur nära $f(x, y) = 1$ som helst utan att riktigt nå dit. Om du påstår att 0.99 är det största värdet på funktionen f i mängden U så kan jag kontra med att 0.999 är större, varpå du kan kontra med att 0.9999 är ännu större, och så vidare. Inget *största* värde finns.

F Om U är en sluten mängd och begränsad mängd i $\mathbb{R}^2$ så existerar nödvändigtvis globalt max i U.

Svar: Sant. Notera till exempel att ovanstående problem inte uppstår för den slutna bollen

$$U = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; x^2+y^2 \leq 1\right\},$$

ty i denna mängd har funktionen $f(x,y) = x$ ett globalt maxmimum $f(1,0) = 1$.

G Om U är en begränsad mängd i $\mathbb{R}^2$, så existerar nödvändigtvis globalt max i U.

Svar: Falskt, se ovanstående exempel med $f(x,y) = x$.

(b) Låt $f(x,y,z) = \sin(y) + \cos(xy) - yz$. Bestäm ekvationen för tangentplanet till nivåytan $f(x,y,z) = 1+\pi$ i punkten $(1, \pi/2, -2)$. Bestäm också riktningsderivatan till f i samma punkt i riktning $\frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)$.

Lösning: Ytan kan beskrivas som nivåytan

$$f(x,y,z) = \sin(y) + \cos(xy) - yz = \pi + 1$$

Vi beräknar gradienten[2]

$$\nabla f(x,y,z) = (-y\sin xy, \cos y - x\sin xy - z, -y)$$

och utvärderar den i punkten $(1, \pi/2, -2)$:

$$\nabla f(1, \pi/2, -2) = (-\pi/2, 1, -\pi/2)$$

Ekvationen för tangentplanet i punkten $a = (1, \pi/2, -2)$ blir således

$$\nabla f(1, \pi/2, -2) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{a}) = 0$$

vilket blir

$$-\frac{\pi}{2}(x-1) + (y - \frac{\pi}{2}) - \frac{\pi}{2}(z+2) = 0$$

Vi kan slutligen skriva detta på den mer kompakta formen

$$\boxed{-\pi x + 2y - \pi z = 2\pi}$$

För att beräkna riktningsderivatan av f i riktningen $\frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)$ definierar vi

$$\mathbf{u} = \frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1).$$

Vi har då

$$D_{\mathbf{u}}f(1,\pi/2,-2) = \mathbf{u} \cdot \nabla f(1,\pi/2,-2) = \frac{1}{\sqrt{3}}\left(-\frac{\pi}{2} + 1 - \frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{\sqrt{3}}(1-\pi).$$

[2] Daniels lösningsförslag saknar termen $-z$ i gradientens y-komponent, han råkade missa den. Förhoppningsvis har jag inte gjort några misstag men det är alltid bra att vara uppmärksam när ni läser såna här lösningsförslag, om ni ser något som får er att tänka “jag tror inte att det där stämmer” så kan ni mycket väl ha rätt.

(c) Låt $\mathcal{C}$ vara kurvan i $\mathbb{R}^3$ som ges av ekvationerna

$$z = \frac{x^2}{2}, \qquad y = \frac{2\sqrt{2}}{3}x^{3/2}$$

med $x \in \mathbb{R}_{\geq 0}$.

(i) Bestäm en parameterisering $r(t)$ av $\mathcal{C}$.

Lösning: Vi kan parameterisera kurvan genom att sätta $x(t) = t$ för $t \in \mathbb{R}_{\geq 0}$. Således blir positionsvektorn

$$\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + \frac{2\sqrt{2}}{3}t^{3/2}\mathbf{j} + \frac{1}{2}t^2\mathbf{k}.$$

(ii) Bestäm längden av $\mathcal{C}$ mellan $t = 0$ och $t = 1$ genom att ställa upp den relevanta kurvintegralen och beräkna den.

Lösning: Kurvlängden ges av integralen

$$\int_{\mathcal{C}} \mathrm{d}s = \int_0^1 \left| \frac{\mathrm{d}\mathbf{r}(t)}{\mathrm{d}t} \right| \mathrm{d}t,$$

så låt osss beräkna hastigheten

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{r}(t)}{\mathrm{d}t} = \mathbf{i} + \sqrt{2t}\mathbf{j} + t\mathbf{k}$$

och farten

$$\left| \frac{\mathrm{d}\mathbf{r}(t)}{\mathrm{d}t} \right| = \sqrt{1 + 2t + t^2} = \sqrt{(1+t)^2} = 1 + t.$$

Således får vi kurvlängden till

$$\int_0^1 1 + t \ \mathrm{d}t = 3/2.$$

(d) Låt $f(x, y, z) = x^2y^3z^2 + z$ och låt $g(t)$ vara en differentierbar funktion. Sätt $\mathbf{r}(t) = e^t\mathbf{i}\cos t\mathbf{j} + g(t)\mathbf{k}$ och beräkna $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}f(\mathbf{r}(t))$.

Lösning: Vi beräknar först

$$f(\mathbf{r}(t)) = e^{2t}\cos^3 tg(t)^2 + g(t)$$

Vi deriverar nu denna funktion genom att använda en kombination av produktregeln och kedjeregeln:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}f(\mathbf{r}(t)) = 2e^{2t}\cos^3 tg(t)^2 + e^{2t}3\cos^2 t(-\sin t)g(t)^2 + e^{2t}\cos^3 t2g(t)g'(t) + g'(t).$$

Vi kan förenkla detta något:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}f(\mathbf{r}(t)) = e^{2t}\cos^2 t\Big(2\cos tg(t)^2 - 3\sin tg(t)^2 + 2\cos tg(t)g'(t)\Big) + g'(t).$$

Till följande uppgift skall fullständig lösning redovisas på separat skrivpapper. Motivera och förklara så väl du kan.

Problem 2

Låt $f(x, y) = -2x + 2y + x^2 + y^2$.

(a) Bestäm och klassificera de kritiska punkterna till $f(x, y)$.

Lösning: Kritiska punkter fås genom att lösa ekvationssystemet $\nabla f(x, y) = (0, 0)$, dvs

$$\begin{aligned} -2 + 2x &= 0 \\ 2 + 2y &= 0 \end{aligned}$$

Det finns endast en lösning: $(x, y) = (-1, 1)$. För att karaktärisera punkten beräknar vi Hessianen

$$H(f) = \begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{21} & f_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Vi har $f_{11} > 0$ samt $\det H > 0$ och således är detta en minpunkt.

(b) hitta max och min till $f(x, y)$ på disken $x^2 + y^2 \leq 1$.

Lösning: Eftersom den globala kritiska punkten $(1, -1)$ ligger utanför disken $x^2 + y^2 \leq 1$ så måste extremvärden på disken ligga på randen $x^2 + y^2 = 1$. Vi kan parameterisera randen med

$$x(t) = \cos t, \qquad y(t) = \sin t, \qquad 0 \leq t \leq 2\pi.$$

På randen definierar vi funktionen

$$g(t) = f(\mathbf{r}(t)) = -2\cos t + 2\sin t + \cos^2 t + \sin^2 t = 2(\sin t - \cos t) + 1.$$

Vi söker kritiska punkter:

$$g'(t) = 2(\cos t + \sin t) = 0$$

vilket medför

$$\cos t = -\sin t.$$

Detta innebär alltså att det finns kritiska punkter då $x = -y$ på randen, dvs. då $x^2+y^2 = 1$. De enda punkterna som uppfyller båda dessa villkor är

$$x = \frac{1}{\sqrt{2}},\ y = -\frac{1}{\sqrt{2}}, \qquad x = -\frac{1}{\sqrt{2}},\ y = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Funktionens värden i dessa punkter är

$$f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 1 - 2\sqrt{2}, \qquad f\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 1 + 2\sqrt{2},$$

och således drar vi slutsatsen att $(x, y) = (1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2})$ är en minpunkt och $(x, y) = (-1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$ är en maxpunkt.

(c) Bestäm Taylorpolynomet till $f(x, y)$ i punkten $(0, 0)$ till andra ordningen i x och y.

Lösning: Taylorpolynomet av $f(x, y)$ kring (a, b) ges i allmänhet till andra ordningen i $h = x - a$ och $k = x - b$ som

$$f(x, y) = f(a, b) + f_1(a, b)h + f_2(a, b)k + \frac{1}{2}\left(f_{11}(a, b)h^2 + 2f_{12}(a, b)hk + f_{22}(a, b)k^2\right) + \cdots$$

Vi söker utvecklingen kring $(a, b) = (0, 0)$ vilket då ges av

$$f(x, y) = 0 - 2x + 2y + \frac{1}{2}\left(2x^2 + 2y^2\right) + \cdots$$

där vi har använt att $h = x - a = x$ och $k = y - b = y$.

Godkäntdelen: del 2

Till uppgift 3 nedan räcker det med svar (ingen motivering behövs), men för uppgift 4-7 skall fullständiga lösningar redovisas. Motivera och förklara så väl du kan. Alla lösningar anges på separat skrivpapper.

Problem 3

(a) Ange om följande är sant eller falskt.

Påstående: Om $\mathbb{F} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ är ett vektorfält så är vektorn $\mathbf{F}(x, y)$ paralell med fältlinjen som skär punkten (x, y).

Svar: Sant.

(b) Vilka av följande påståenden stämmer för dubbelintegralen $\iint_D f(x, y)\, \mathrm{d}A$ av en positiv, integrerbar funktion $f(x, y)$ på en domän $D \subset \mathbb{R}^2$? Varje rätt svar ger 0.5p.

A Integralen är en vektor i $\mathbb{R}^2$.

Svar: Falskt, integralen är ett reellt tal.

B Värdet av integralen är ett tal som representerar volymen av soliden under grafen $z = f(x, y)$ och ovanför D.

Svar: Sant. Detta är en flerdimensionell motsvarighet av enkelintegraler

$$\int_a^b f(x)\, \mathrm{d}x$$

som ger arean av området under grafen $y = f(x)$ och ovanför domänen $D = [a, b]$.

C Om $f = 1$ beräknar integralen även arean av D.

Svar: Sant. Om $f = 1$ så har soliden den konstanta höjden 1 och volymen

$$\mathrm{vol(solid)} = \mathrm{basarea} * \mathrm{höjd} = \mathrm{area}(D) * 1 = \mathrm{area}(D)$$

och vi vet att volymen ges av dubbelintegralen. Alltså:

$$\mathrm{area}(D) = \mathrm{vol(solid)} = \iint_D f(x, y)\, \mathrm{d}A = [f = 1] = \iint_D \mathrm{d}A$$

D Om D är en rektangel i $\mathbb{R}^2$ så spelar det ingen roll vilken ordning vi utför integralen.

Svar: Sant.

E Om D är angiven på x-enkel form så *måste* vi börja med att integrera över x.

Svar: Falskt.

Problem 4

Låt $\mathcal{C}$ vara kvartscirkelbågen i $\mathbb{R}^2$ som sammanbinder punkterna $(2,0)$ och $(1,1)$. Beräkna kurvintegralen

$$\int_{\mathcal{C}} x^2 \, \mathrm{d}y - 2y \, \mathrm{d}x$$

Lösning: Eftersom kvartscirkeln är en del av en cirkel med centrum i $(x,y) = (1,0)$ så parameteriseras den med

$$x(t) = 1 + \cos t, \qquad y(t) = \sin t, \qquad 0 \leq t \leq \pi/2.$$

Integralen blir då

$$\begin{aligned}
\int_{\mathcal{C}} x^2 \, \mathrm{d}y - 2y \, \mathrm{d}x &= \int_0^{\pi/2} \Big(x(t)^2 y'(t) - 2y(t)x'(t) \Big) \, \mathrm{d}t = \\
&= \int_0^{\pi/2} \Big((1+\cos t)^2 \cos t - 2\sin t(-\sin t) \Big) \, \mathrm{d}t = \\
&= \int_0^{\pi/2} 2 + \cos t + \cos^3 t \, \mathrm{d}t,
\end{aligned}$$

där vi har använt trigonometriska ettan för att komma till den sista raden.

Vi kan dela upp detta i två integraler, och vi börjar med

$$\int_0^{\pi/2} 2 + \cos t \, \mathrm{d}t = \Big[2t + \sin t \Big]_0^{\pi/2} = \pi + 1.$$

Den andra integralen ges av

$$\int_0^{\pi/2} \cos^3 t \, \mathrm{d}t = \int_0^{\pi/2} \cos t \big(1 - \sin^2 t\big) \, \mathrm{d}t = \left[\begin{array}{c} u = \sin t \\ \mathrm{d}u = \cos t \, \mathrm{d}t \end{array} \right] = \int_0^1 1 - u^2 \, \mathrm{d}u = 1 - \frac{1}{3},$$

så det slutgiltiga resultatet blir

$$\int_{\mathcal{C}} x^2 \, \mathrm{d}y - 2y \, \mathrm{d}x = \pi + 1 + 1 - \frac{1}{3} = \pi + \frac{5}{3}.$$

Problem 5

Beräkna volymen under paraboloiden $z = 1-x^2-y^2$ och ovanför området $D \subset \mathbb{R}^2$ som begränsas av paraboloiden samt $-x \leq y \leq \sqrt{3}x$, $x \geq 0$. **Tips:** $\arctan\sqrt{3} = \pi/3$.

Lösning: Vi börjar med att ta reda på hur skärningskurvan ser ut i xy-planet. I planet har vi $z = 0$ och allltså blir skärningskurvan

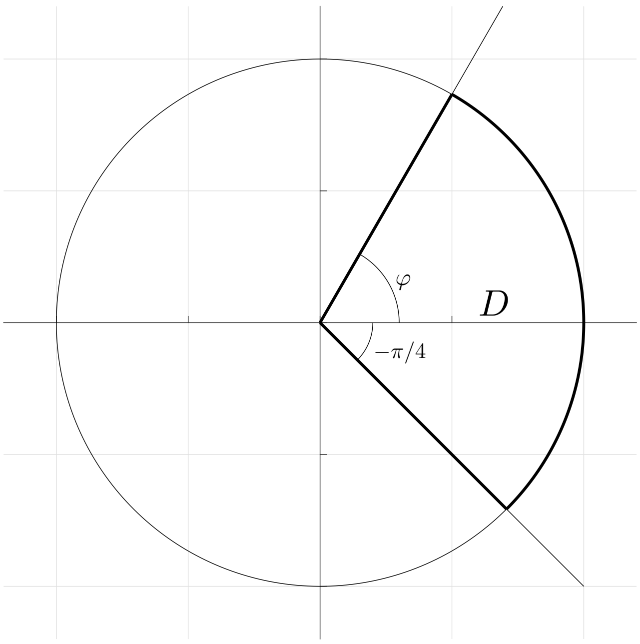
$$1 - x^2 - y^2 = 0$$

vilket motsvarar en cirkel med radie $r = 1$. Men vi ska inte beräkna volymen ovanför hela disken $x^2 + y^2 \leq 1$, utan endast ovanför den sektor som begränsas av $-x \leq y \leq \sqrt{3}x$. Dessa olikheter anger två linjer

$$y = -x, \qquad y = \sqrt{3}x$$

och vi är alltså intresserade av cirkelsektorn mellan dem. Vi beskriver enklast denna sektor med polära koordinater och vi söker vinkeln θ mellan linjerna. Vinkeln mellan linjen $y = -x$ och x-axeln är $-\pi/4$; vinkeln mellan linjen $y = \sqrt{3}x$ och x-axeln är ϕ, där $\tan\phi = \sqrt{3}$. Således har vi $\phi = \arctan\sqrt{3} = \pi/3$. Det totala vinkelsegmentet kan alltså parameteriseras med

$$-\pi/4 \leq \theta \leq \pi/3$$



Nu kan vi ställa upp integralen som ger volymen:

$$\iint_D f(x,y)\ \mathrm{d}A = \iint_D 1 - x^2 - y^2\ \mathrm{d}A = \int_{-\pi/4}^{\pi/3} \mathrm{d}\theta \int_0^1 1 - r^2 r\ \mathrm{d}r$$

Integralerna är oberoende av varandra och vi kan beräkna dem var för sig:

$$\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4}\right)\left[\frac{r^2}{2} - \frac{r^4}{4}\right]_0^1 = \frac{7\pi}{48}.$$

Problem 6

Låt $\mathbf{F}(x, y) = (-y, x)$.

(a) Beräkna arbetet som vektorfältet $\mathbf{F}$ utgör längs kurvan $\mathcal{C}$ som parameteriseras av

$$\mathbf{r}(t) = (t^2, t^3 - t), \qquad 0 \leq t \leq 1$$

(b) Använd Greens sats för att räkna ut arean till området R som $\mathcal{C}$ omsluter.

Lösning:

(a) Om $x(t) = t^2$ och $y(t) = t^3 - t$ får vi direkt att

$$\mathrm{d}x = 2t\ \mathrm{d}t, \qquad \mathrm{d}y = (3t^2 - 1)\ \mathrm{d}t.$$

Insättning ger då att det utförda arbetet ges av

$$\begin{aligned}\oint_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r} &= \int_{\mathcal{C}} -y\ \mathrm{d}x + y\ \mathrm{d}y = \\ &= \int_0^1 -(t^3 - t)2t\mathrm{d}t + t^2(3t^2 - 1)\ \mathrm{d}t = \\ &= \int_0^1 t^4 + t^2\ \mathrm{d}t = \left[\frac{t^5}{5} + \frac{t^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1}{5} + \frac{1}{3} = \frac{8}{15}.\end{aligned}$$

(b) Greens sats säger att

$$\oint_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r} = \iint_R \underbrace{\left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right)}_{=2} \mathrm{d}x\mathrm{d}y = 2 \iint_R \mathrm{d}A = 2 * \mathrm{area}(R).$$

Alltså får vi frånresultatet i (a) att området R har arean

$$\mathrm{area}(R) = \frac{1}{2} \oint_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r} = \frac{4}{15}.$$

Problem 7

Låt C vara cylindern i $\mathbb{R}^3$ som bestäms av $x^2 + y + 2 \leq a^2$ samt $-3 \leq z \leq 3$.

(a) Beräkna flödet av vektorfältet $\mathbf{F}(x,y,z) = (x,y,z)$ upp genom toppen och ner genom botten av $\mathcal{C}$.

Lösning: Vi betecknar botten av cylindern med C_b och toppen med C_t. Dessa är diskar med radie a placerade på z-värdena $z = -3$ respektive $z = 3$. Normalen på toppen pekar därför rakt uppåt och kan väljas till $\hat{\mathbf{n}}_t = \mathbf{k}$, och på botten har vi $\hat{\mathbf{n}}_b = -\mathbf{k}$, som alltså pekar rakt nedåt. Flödet upp genom toppen blir då

$$\mathcal{F}_t = \iint_{C_t} \mathbf{F}(x,y,z) \cdot \hat{\mathbf{n}}_t \, \mathrm{d}S = \iint_D \mathbf{F}(x,y,3) \cdot \mathbf{k} \, \mathrm{d}x\mathrm{d}y = 3 \iint_D \mathrm{d}x\mathrm{d}y = 3\mathrm{area}(D) = 3\pi a^2$$

där D är disken $x^2 + y^2 \leq a^2$. På samma sätt får vi flödet genom botten till

$$\mathcal{F}_b = \iint_{C_b} \mathbf{F}(x,y,z) \cdot \hat{\mathbf{n}}_b \, \mathrm{d}S = -\iint_D \mathbf{F}(x,y,-3) \cdot \mathbf{k} \, \mathrm{d}x\mathrm{d}y = 3 \iint_D \mathrm{d}x\mathrm{d}y = 3\mathrm{area}(D) = 3\pi a^2.$$

(b) Använd dina resultat i (a) tillsammans med Gauss sats för att beräkna flödet av $\mathbf{F}(x,y,z)$ ut genom mantelytan av C.

Lösning: Enligt Gauss sats kan vi beräkna det totala flödet genom volymsintegralen av divergensen:

$$\mathcal{F}_{tot} = \iiint_C \nabla \cdot \mathbf{F} \, \mathrm{d}V = \oiint_{\partial C} \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{n}} \, \mathrm{d}S = \mathcal{F}_t + \mathcal{F}_t + \mathcal{F}_m,$$

där $\mathcal{F}_m$ betecknar flödet ut genom mantelytan. Totala flödet blir

$$\mathcal{F}_{tot} = \iiint_C \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{n}} \, \mathrm{d}V = \iint_C \left(\frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z} \right) \mathrm{d}V = 3 \iiint_C \mathrm{d}V = 3\mathrm{vol}(C) = 3 * 6 * \pi a^2 = 18\pi a^2.$$

Vi kan slutligen bestämma flödet genom mantelytan genom att kombinera detta med resultaten i (a):

$$\mathcal{F}_m = \mathcal{F}_{tot} - \mathcal{F}_t - \mathcal{F}_b = 18\pi a^2 - 3\pi a^2 - 3\pi a^2 = 12\pi a^2.$$