Tentamen
TMA044 Flervariabelanalys E2 (med lösningar)

2017-10-26 kl. 8.30–12.30

Examinator: Daniel Persson, Matematiska vetenskaper, Chalmers

Telefonvakt: Mattias Lennartsson, telefon: anknytning 5325

Hjälpmedel: endast bifogat formelblad, ej räknedosa

För godkänt på tentan krävs antingen 25 poäng på godkäntdelens två delar sammanlagt, eller att båda delarna är godkända var för sig. För godkänt på del 1 krävs minst 10 poäng, för godkänt på del 2 krävs 13 poäng. Erhållen poäng på någon av delarna får ersätta poäng på motsvarande del på senare tentamen tills kursen ges nästa läsår. För att få slutbetyg på kursen skall också Matlabmomentet vara godkänt. För betyg 4 eller 5 krävs dessutom 33 resp. 42 poäng sammanlagt på tentamens alla delar.

Lösningar läggs ut på kursens webbsida första vardagen efter tentamensdagen. Tentan rättas och bedöms anonymt. Resultat meddelas via Ladok ca. tre veckor efter tentamenstillfället. Första granskningstillfälle meddelas på kurswebbsidan, efter detta sker granskning alla vardagar 9-13, MV:s exp.

Godkäntdelen, del 1

Uppgift 1 och 2 se sidan 4

Godkäntdelen, del 2

Uppgift 3-7 se sidan 5

Överbetygsdelen

Endast om man ligger enstaka poäng från godkänt och presterat riktigt bra på någon av följande uppgifter kan poäng på denna del räknas in för att nå godkäntgränsen. Normalt krävs för poäng på uppgift att man redovisat en fullständig lösningsgång, som i princip lett, eller åtminstone skulle kunnat leda, till målet.

8. Bevisa:

(a) identiteten (3p)

$$\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{F}) = 0 \quad (\mathbf{div}(\mathbf{curl}) = 0)$$

Lösning: Se Adams kapitel 16.2, Thm 3.

(b) Greens sats för ett vektorfält på formen $\mathbf{F}(x, y) = F_1(x, y)\mathbf{i} + 0 \cdot \mathbf{j}$. (3p)

Lösning: Se Adams kapitel 16.3, Thm 6.

9. Låt D vara en öppen, sammansatt domän och $\mathbf{F}$ ett glatt vektorfält definierat på D.

(a) Visa att om $\mathbf{F}$ är konservativt så är arbetet utfört av $\mathbf{F}$ noll längs varje sluten, styckvis glatt kurva $\mathcal{C} \subset D$. (3p)

(b) Låt P och Q vara två godtyckliga punkter i D. Visa att om arbetet utfört av $\mathbf{F}$ är noll längs varje sluten, styckvis glatt kurva i D, så är $\mathbf{F}$ *vägoberoende*, dvs samma arbete utförs längs alla styckvis glatta kurvor i D som sammanbinder P och Q. (3p)

Lösning: Se Adams, kapitel 15.4, Thm 1.

10. Visa följande: (3p)

(a)

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}.$$

Lösning: Se Adams, kapitel 14.4, Exempel 4 ("A very important integral") (3p)

(b)

$$\int_0^3 dy \int_{\sqrt{y/3}}^1 dx \int_0^{e^{-x^3}} dz = 1 - e^{-1}.$$

Lösning: Vi skall beräkna en trippelintegral på formen

$$I = \iiint_V dV, \tag{1}$$

dvs volymen av en solid V definerad av

$$V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, \sqrt{y/3} \le x \le 1, 0 \le y \le 3, 0 \le z \le e^{-x^3}\}. \tag{2}$$

Vi kan lätt utföra den första integralen över z vilket ger

$$I = \iint_D e^{-x^3} dA \tag{3}$$

där D är domänen

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^3 \,|\, \sqrt{y/3} \le x \le 1, 0 \le y \le 3\}, \tag{4}$$

skriven på x-enkel form. För att utföra den sista integralen byter vi gränserna och skriver domänen D på y-enkel form

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^3 \,|\, 0 \le x \le 1, 0 \le y \le 3x^2\}. \tag{5}$$

Detta ger

$$I = \iint_D e^{-x^2} dA = \int_0^1 e^{-x^3} dx \int_0^{3x^2} dy = 3 \int_0^1 x^2 \, e^{-x^3} \, dx = 3\Big[-\frac{e^{-x^3}}{3}\Big]_0^1 = 1 - e^{-1}. \tag{6}$$

Formelblad för TMA044

Trigonometri.

$$\cos(x+y) = \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y)$$

$$\sin(x+y) = \sin(x)\cos(y) + \cos(x)\sin(y)$$

$$\cos(x)\cos(y) = \frac{1}{2}(\cos(x-y) + \cos(x+y))$$

$$\sin(x)\sin(y) = \frac{1}{2}(\cos(x-y) - \cos(x+y))$$

$$\sin(x)\cos(y) = \frac{1}{2}(\sin(x-y) + \sin(x+y))$$

$$\tan(x+y) = \frac{\tan(x) + \tan(y)}{1 - \tan(x)\tan(y)}$$

Integralkatalog

$$\int x^a\,dx = \frac{x^{a+1}}{a+1} + C \quad , \quad a \neq -1$$

$$\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + C$$

$$\int \sin x\,dx = -\cos x + C$$

$$\int \cos x\,dx = \sin x + C$$

$$\int \frac{1}{\cos^2 x}\,dx = \tan x + C$$

$$\int \frac{1}{\sin^2 x}\,dx = -\cot x + C$$

$$\int e^x\,dx = e^x + C$$

$$\int a^x\,dx = \frac{a^x}{\ln a} + C \quad , \quad 0 < a \neq 1$$

$$\int \frac{1}{x^2+a^2}\,dx = \frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a} + C \quad , \quad a \neq 0$$

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \ln|f(x)| + C$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{a-x^2}}\,dx = \arcsin\frac{x}{\sqrt{a}} + C \quad , \quad a > 0$$

$$\int \sqrt{a-x^2}\,dx = \frac{1}{2}x\sqrt{a-x^2} + \frac{a}{2}\arcsin\frac{x}{\sqrt{a}} + C \quad , \quad a > 0$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+a}}\,dx = \ln|x + \sqrt{x^2+a}| + C \quad , \quad a \neq 0$$

$$\int \sqrt{x^2+a}\,dx = \frac{1}{2}(x\sqrt{x^2+a} + a\ln|x + \sqrt{x^2+a}|) + C$$

Maclaurinutvecklingar

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots$$

$$\sin x = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1}\frac{x^{2k-1}}{(2k-1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots$$

$$\cos x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots$$

$$(1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} x^k = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \ldots \quad , \quad |x| < 1 \quad , \quad \binom{\alpha}{k} = \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-k+1)}{k(k-1)\ldots 1}$$

$$\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1}\frac{x^k}{k} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots \quad , \quad -1 < x \leq 1$$

$$\arctan x = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1}\frac{x^{2k-1}}{2k-1} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \ldots \quad , \quad |x| \leq 1$$

Övrigt

Masscentrum (x_T, y_T, z_T) för Ω ges av $x_T = \dfrac{\iiint_\Omega x\rho(x,y,z)\,dxdydz}{\iiint_\Omega \rho(x,y,z)\,dxdydz}$, analogt för y_T, z_T.

$\rho(x,y,z)$ är densiteten.

Anonym kod	TMA044 Flervariabelanalys E2 (med lösningar) 2017-10-26	sid.numm

Godkäntdelen: del 1

1. Till nedanstående uppgifter skall korta lösningar redovisas, samt svar anges, på separat skrivpapper.

(a) i. Ange om följande är sant eller falskt.
Påstående: *Om gränsvärdet då $(x, y) \to (a, b)$ för en funktion $f(x, y)$ existerar så är $f(x, y)$ kontinuerlig i (a, b).* (0.5p)

Svar: Falskt.

ii. Vilka *tre* av följande påståenden stämmer för en funktion $f(x, y)$? Varje rätt svar ger 0.5p. *Det räcker att ange svar; ingen motivering behövs här.* (1.5p)

A Den partiella derivatan $f_1(x, y)$ anger lutningen i punkten x på tangentlinjen till kurvan som skär ytan $z = f(x, y)$ och planet $y =$ konst.

B Den partiella derivatan $f_1(x, y)$ anger lutningen i punkten y på tangentlinjen till kurvan som skär ytan $z = f(x, y)$ och planet $x =$ konst.

C Om vi vet att f är kontinuerlig i (x, y) så vet vi att f är differentierbar i (x, y).

D Om $f(x, y)$ är linjär i både x och y så beskriver grafen $z = f(x, y)$ ett plan i $\mathbb{R}^3$.

E Gradienten av $f(x, y)$ kan ses som en flervariabel-analog till derivatan av $f(x)$.

F Divergensen av $f(x, y)$ kan ses som en flervariabel-analog till derivatan av $f(x)$.

Svar: A, D, E är rätt.

(b) Bestäm ekvationen för tangentplanet till ytan $x^3y^4z^2 = 8$ i punkten $(2, 1, 1)$. (2p)

Lösning: Ytan kan beskrivas som nivåytan

$$G(x, y, z) = x^3y^4z^2 - 8 = 0$$

. Vi beräknar gradienten

$$\nabla G(x, y, z) = (3x^2y^4z^2, 4x^3y^3z^2, 2x^3y^4z)$$

och utvärderar den i punkten $(2, 1, 1)$:

$$\nabla G(2, 1, 1) = (12, 32, 16).$$

Ekvationen för tangentplanet i punkten $\mathbf{a} = (2, 1, 1)$ blir således

$$\nabla G(2, 1, 1) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{a}) = 0$$

vilket blir

$$12(x - 2) + 32(y - 1) + 16(z - 1) = 0.$$

Vi kan slutligen skriva detta på den mer kompakta formen

$$3x + 8y + 4z = 18.$$

(c) Låt $\mathcal{C}$ vara kurvan som ges av ekvationen $-2x + y^2 + 1 = -x^2 + 4y$.

i. Bestäm en parametrisering av $\mathcal{C}$. (1p)

Lösning: Vi kan komplettera kvadraterna och skriva kurvan som

$$(x-1)^2 + (y-2)^2 = 4$$

vilket vi känner igen som en cirkel med centrum i $(1, 2)$ och radie $r = 2$. Denna kan parametriseras med

$$\mathbf{r}(t) = (1 + 2\cos t)\mathbf{i} + (2 + 2\sin t)\mathbf{j}$$

där $0 \leq t \leq 2\pi$.

ii. Bestäm längden av $\mathcal{C}$ genom att ställa upp den relevanta kurvintegralen och beräkna den. (1p)

Lösning: Kurvlängden ges av integralen

$$\int_{\mathcal{C}} ds = \int_0^{2\pi} \left| \frac{d\mathbf{r}(t)}{dt} \right| dt.$$

Vi beräknar hastigheten

$$\frac{d\mathbf{r}(t)}{dt} = -2\sin t\,\mathbf{i} + 2\cos t\,\mathbf{j}$$

och farten

$$\left| \frac{d\mathbf{r}(t)}{dt} \right| = \sqrt{(-2\sin t)^2 + (2\cos t)^2} = 2.$$

Således får vi kurvlängden till

$$2\int_0^{2\pi} dt = 4\pi.$$

(d) Låt $f = f(x, y)$ vara en två gånger differentierbar funktion på $\mathbb{R}^2$. Beräkna $\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}$ för $x = 2u + v^2$ och $y = u^2$. Uttryck svaret i termer av de partiella derivatorna av f. (2.5p)

Lösning: Vi beräknar först

$$\frac{\partial f}{\partial u} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u} = 2f_1 + 2uf_2.$$

Vi fortsätter att beräkna andraderivatan:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial u^2} = \frac{\partial}{\partial u}\big(2f_1 + 2uf_2\big) = 2\frac{\partial f_1}{\partial u} + 2f_2 + 2u\frac{\partial f_2}{\partial u}.$$

Vi använder nu kedjeregeln för att beräkna de återstående derivatorna av f_1 och f_2:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial u^2} = 2\frac{\partial f_1}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + 2\frac{\partial f_1}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u} + 2f_2 + 2u\frac{\partial f_2}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + 2u\frac{\partial f_2}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u}.$$

Insättning av de partiella derivatorna av x och y ger då slutligen

$$\frac{\partial^2 f}{\partial u^2} = 4f_{11} + 8uf_{12} + 2f_2 + 4u^2 f_{22},$$

där vi även använt det faktum att $f_{12} = f_{21}$.

Till följande uppgift skall fullständig lösning redovisas på separat skrivpapper. Motivera och förklara så väl du kan.

2. Funktionen $V(x, y) = x^3 + y^3$ ger den sammanlagda volymen av två kuber med sidlängder x och y.

(a) Bestäm och klassificera de kritiska punkterna till $V(x, y)$. **Lösning:** Kritiska punkter fås genom att lösa ekvationssystemet (1.5p)

$$\frac{\partial V}{\partial x} = 3x^2 = 0, \qquad \frac{\partial V}{\partial y} = 3y^2 = 0.$$

Enda lösningen är $(x, y) = (0, 0)$. För att se vilken typ av kritisk punkt det är beräknar vi Hessianen

$$H(V(x, y)) = \begin{pmatrix} f_{11}(x, y) & f_{12}(x, y) \\ f_{21}(x, y) & f_{22}(x, y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6x & 0 \\ 0 & 6y \end{pmatrix}$$

Vi har således att $\det H(V(0, 0)) = 0$ och vi får ingen info. Dock kan vi lätt inse att $(0, 0)$ måste vara en *sadelpunkt* till $V(x, y)$, eftersom $f(x) = x^3$ har en sadelpunkt i $x = 0$ ($f(x) < 0$ för $x < 0$ men $f(x) > 0$ för $x > 0$).

(b) Ställ upp en funktion $A(x, y)$ som beskriver den sammalagda arean av kuberna och använd Lagrange metod för att bestämma den största möjliga sammanlagda volymen av kuberna givet kravet att $A(x, y) = 12$. (3p)

Lösning: Arean ges av funktionen

$$A(x, y) = 6x^2 + 6y^2.$$

Vi ställer således upp Lagrangefunktionen

$$L(x, y, \lambda) = V(x, y) + \lambda\big(A(x, y) - 12\big) = x^3 + y^3 + \lambda(6x^2 + 6y^2 - 12).$$

För att hitta kritiska punkter till denna måste vi lösa ekvationssystemet:

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial x} &= 3x^2 + 12\lambda x = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial y} &= 3y^2 + 12\lambda y = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda} &= 6x^2 + 6y^2 - 12 = 0. \end{aligned}$$

Vi löser ut λ från de första två ekvationerna:

$$\lambda = -\frac{x}{4} = -\frac{y}{4}$$

vilket ger

$$x = y.$$

Insättning i den tredje ekvationen leder till

$$6x^2 + 6x^2 = 12$$

dvs

$$x^2 = 1.$$

Vi har alltså två kritiska punkter

$$(-1,-1) \qquad \text{och} \qquad (1,1),$$

där funktionen tar värdena

$$V(-1,-1) = -2, \qquad V(1,1) = 2.$$

Slutsatsen blir alltså att volymen maximeras i punkten $(x,y) = (1,1)$ där $V(1,1) = 2$.

(c) Bestäm Taylorpolynomet till $V(x,y)$ i punkten $(1,1)$ till andra ordningen i $h = x-1$ och $k = y-1$. (1p)

Lösning: Taylorpolynomet av $V(x,y)$ kring $(x,y) = (1,1)$ ges till andra ordningen av

$$\begin{aligned} V(x,y) &= V(1,1) + V_1(1,1)(x-1) + V_2(1,1)(y-1) \\ &\quad + \frac{1}{2}\Big(V_{1,1}(1,1)(x-1)^2 + 2V_{12}(1,1)(x-1)(y-1) + V_{22}(1,1)(y-1)^2\Big) + \cdots \\ &= 2 + 3h + 3k + \frac{1}{2}(6h^2 + 0 + 6k^2) + \cdots \\ &= 2 + 3(h+k) + 3(h^2+k^2) + \cdots \end{aligned} \tag{7}$$

där vi definierat $h = x-1$, $k = y-1$.

Godkäntdelen: del 2

Till uppgift 3 nedan räcker det med svar (ingen motivering behövs), men för uppgift 4-7 skall fullständiga lösningar redovisas. Motivera och förklara så väl du kan. Alla lösningar anges på separat skrivpapper.

3. (a) Ange om följande är sant eller falskt.
Påstående: *Om* $\mathbf{F} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ *är ett vektorfält så är vektorn* $\mathbf{F}(x, y)$ *vinkelrät mot fältlinjen som skär punkten* (x, y). (0.5p)

Svar: Falskt.

(b) Vilka *två* av följande påståenden stämmer för ett vektorfält $\mathbf{F}(x, y)$? Varje rätt svar ger 0.5p. (1p)

A Om $\mathbf{F}(x, y)$ är ett konservativt vektorfält så finns en unik skalär funktion $\phi(x, y)$ så att $\mathbf{F} = \nabla\phi$.

B Divergensen av $\mathbf{F}$ är en skalär i $\mathbb{R}^2$.

C Gradienten av $\mathbf{F}$ är en skalär i $\mathbb{R}^2$.

D Om $\mathbf{F}$ är rotationsfritt så är $\mathbf{F}$ konservativt.

E Rotationen av $\mathbf{F}$ är divergensfritt ("solenoidal").

Svar: B, E är rätt.

4. Låt $\mathcal{C}$ vara kurvan som parametriseras av $\mathbf{r}(t) = \mathbf{i} + 2t\mathbf{j} + (10 - t^2)\mathbf{k}$ för $0 \le t \le 2$. Bestäm värdet av integralen

$$\int_{\mathcal{C}} \sin x \, dx + y \, dy - 30z \, dz$$

genom att

(a) beräkna kurvintegralen direkt med hjälp av parametriseringen; (3p)

Lösning: Parametriseringen ger oss $x(t) = 1, y(t) = 2t, z(t) = 10 - t^2$ och den parametriserade integralen kan således skrivas

$$I = \int_0^2 \Big(\sin x(t)\, x'(t) + y(t)\, y'(t) - 30z(t)\, z'(t)\Big)\, dt = \int_0^2 \Big(4t + 60t(10 - t^2)\Big) dt.$$

Detta är nu en vanlig envariabelintegral och kan beräknas direkt:

$$I = \int_0^2 \Big(4t + 600t - 60t^3\Big) dt = \Big[\frac{4t^2}{2} + \frac{600t^2}{2} - \frac{60t^4}{4}\Big]_0^2 = 968.$$

(b) utnyttja det faktum att vi kan tolka kurvintegralen som arbetet utfört av det konservativa vektorfältet $\mathbf{F} = \sin x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} - 30z\,\mathbf{k}$ längs kurvan $\mathcal{C}$. (2p)

Lösning: Vi noterar nu att kurvintegralen kan skrivas som en arbetsintegral

$$I = \int_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

där vektorfältet ges av $\mathbf{F} = \sin x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} - 30z\,\mathbf{k}$. Detta är konservativt och kan skrivas $\mathbf{F} = \nabla\phi$ där en potential ges av

$$\phi(x, y, z) = -\cos x + \frac{y^2}{2} - 15z^2.$$

Eftersom konservativa vektorfält är vägoberoende har vi direkt

$$I = \int_{\mathcal{C}} \nabla\phi \cdot d\mathbf{r} = \phi(\mathbf{r}(2)) - \phi(\mathbf{r}(0)) = \phi(1, 4, 6) - \phi(1, 0, 10) = 968.$$

5. Låt $\mathcal{C}$ vara den slutna kurva som parametriseras av $\mathbf{r}(t) = (t - t^3)\mathbf{i} + (2t^3 - 2t^5)\mathbf{j}$ för $0 \le t \le 1$, och låt R vara området som omsluts av $\mathcal{C}$, dvs. $\partial R = \mathcal{C}$.

(a) Använd Greens sats för att visa att kurvintegralen $-\oint_{\mathcal{C}} y\,dx$ kan användas för att beräkna arean av R. (1.5p)

Lösning: I allmänhet så ges arean av R av formeln

$$\text{area}(R) = \iint_R dA.$$

För ett vektorfält $\mathbf{F}(x, y) = F_1(x, y)\mathbf{i} + F_2(x, y)\mathbf{j}$ har vi Greens formel:

$$\iint_R \Big(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\Big) dA = \oint_{\partial R} \mathbf{F} \cdot \mathbf{dr}.$$

Om vi nu väljer $\mathbf{F} = -y\mathbf{i} + 0 \cdot \mathbf{j}$ så ger Greens formel att vi kan beräkna arean med

$$\text{area}(R) = \iint_R dA = \oint_{\partial R} \mathbf{F} \cdot \mathbf{dr} = -\oint_{\mathcal{C}} y\,dx,$$

vilket skulle visas.

(b) Använd kurvintegralen i (a) för att beräkna arean av R. (3p)

Lösning: Vi beräknar arean genom att beräkna kurvintegralen runt den parametriserade kurvan:

$$\text{area}(R) = -\oint_{\mathcal{C}} y\,dx = -\int_0^1 y(t)\,x'(t)\,dt.$$

Enligt parametriseringen har vi $x(t) = t - t^3$, $y(t) = 2t^3 - 2t^5$ och således $x'(t) = 1 - 3t^2$. Insättning i integralen ger då

$$\text{area}(R) = -\int_0^1 (2t^3 - 2t^5)(1 - 3t^2)dt = -\int_0^1 (2t^3 - 6t^5 - 2t^5 + 6t^7)dt = -\int_0^1 (2t^3 - 8t^5 + 6t^7)dt.$$

Vi får alltså slutligen

$$\text{area}(R) = -\Big[\frac{2t^4}{4} - \frac{8t^6}{6} + \frac{6t^8}{8}\Big]_0^2 = \frac{1}{12}.$$

6. Beräkna arean till den del av ytan $x^2 + y^2 = z^2$ där $0 \le z \le 1$. (2p)

Lösning: Vi har en nivåyta S på formen

$$G(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2 = 0,$$

med begränsningen $z \ge 0$. Detta är en kon i $\mathbb{R}^3$ som öppnar sig uppåt i z-riktning. Vi vet att för en nivåyta har vi

$$dS = \left| \frac{\nabla G}{(\partial G / \partial z)} \right| \, dx \, dy.$$

Vi beräknar gradienten

$$\nabla G = (2x, 2y, -2z)$$

vilket ger

$$dS = \left| \frac{(2x, 2y, -2z)}{(-2z)} \right| dx \, dy = \sqrt{\frac{4x^2 + 4y^2 + 4z^2}{4z^2}} \, dx \, dy = \sqrt{\frac{x^2 + y^2}{z^2} + 1} \, dx \, dy = \sqrt{2} \, dx \, dy$$

där vi utnyttjat att $z^2 = x^2 + y^2$ på ytan S. Arean blir då

$$\text{area}(S) = \iint_S dS = \sqrt{2} \iint_D dxdy$$

där D är projektionen av S på xy-planet, dvs disken med radie $r = 1$

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x^2 + y^2 \le 1\}.$$

Vi får alltså till slut

$$\text{area}(S) = \sqrt{2} \iint_D dx \, dy = \sqrt{2} \, \text{area}(D) = \sqrt{2}\pi.$$

7. Beräkna flödet av vektorfältet $\mathbf{F} = z^2 \mathbf{k}$ upp genom halvsfären S som ges av $x^2 + y^2 + z^2 = 4,\ z \ge 0$, genom att:

(a) direkt beräkna flödesintegralen $\iint_S \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{n}} \, dS$; (2.5p)

Lösning: Vi vill beräkna flödet uppåt ut ur ytan S. Detta är en nivåyta på formen

$$G(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 4 = 0, \qquad z \ge 0.$$

Vi vet att för en nivåyta blir flödesintegralen

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{n}} \, dS = \iint_D \mathbf{F} \cdot \frac{\nabla G}{(\partial G / \partial z)} \, dx \, dy,$$

där D är, precis som i föregående uppgift, projektionen av S på xy-planet. I detta fall blir detta disken med radie $r = 2$:

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x^2 + y^2 \le 4\}.$$

Vi får alltså integranden till

$$\mathbf{F} \cdot \frac{\nabla G}{(\partial G/\partial z)} = (0,0,z^2) \cdot \left(\frac{x}{z}, \frac{y}{z}, 1\right) = z^2.$$

På ytan S har vi $z^2 = 4 - x^2 - y^2$ och integralen blir då

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{n}}\, dS = \iint_D z^2\, dx\, dy = \iint_D (4 - x^2 - y^2)\, dx\, dy.$$

Vi går nu över till polära koordinater vilket slutligen ger flödet:

$$\iint_D z^2\, dx\, dy = \iint_D (4-x^2-y^2)\, dx\, dy = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^2 (4-r^2) r\, dr = 2\pi\left[\frac{4r^2}{2} - \frac{r^4}{4}\right]_0^2 = 8\pi.$$

(b) använda Gauss sats. Du måste även förklara varför Gauss sats faktiskt går att använda här trots att ytan S ej är sluten! (2.5p)

Låt V beteckna den totala volymen som innesluts av halvsfären. Gauss sats säger att totala flödet ut ur V ges av

$$\iiint_V \nabla \cdot \mathbf{F}\, dV = \oiint_{\partial V} \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{n}}\, dS.$$

Notera nu att randen ∂V består av två delar:

$$\partial V = S + D$$

där S är halvsfären och D är dess projektion på xy-planet, dvs "botten" på halvsfären. Flödet som beräknas av Gauss sats ger alltså både flödet uppåt, ut ur S, samt ner genom D:

$$\iiint_V \nabla \cdot \mathbf{F}\, dV = \iint_S \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{n}}_S\, dS + \iint_D \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{n}}_D\, dS.$$

För att kunna använda Gauss sats för att beräkna flödet ut ur S måste vi alltså dra bort bidraget från botten:

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{n}}_S\, dS = \iiint_V \nabla \cdot \mathbf{F}\, dV - \iint_D \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{n}}_D\, dS.$$

Låt oss studera flödet ner genom D. En normal ges direkt av $\hat{\mathbf{n}}_D = -\mathbf{k}$ och vi har således

$$\mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{n}}_D = (0,0,z^2) \cdot (0,0,-1) = -z^2.$$

Men på ytan D (alltså botten på halvsfären) har vi $z = 0$! Således drar vi slutsatsen att flödet ner genom D är noll:

$$\iint_D \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{n}}_D\, dS = 0.$$

Detta innebär att just i detta fall kan vi alltså beräkna flödet ut genom den icke-slutna ytan S med hjälp av en volymsintegral:

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{n}}_S\, dS = \iiint_V \nabla \cdot \mathbf{F}\, dV.$$

Nu utför vi trippelintegralen i högerledet och jämför med flödet vi fick i (a)-uppgiften. Divergensen blir

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = 2z,$$

och integralen vi skall beräkna är alltså

$$2 \iiint_V z \, dV.$$

I detta skede är det lämpligt att gå över till sfäriska koordinater:

$$z = \rho \cos\varphi, \qquad dV = \rho^2 \sin\varphi \, d\theta \, d\varphi \, d\rho,$$

och eftersom vi bara vill integrera över halvsfären så begränsas φ-domänen till $0 \leq \varphi \leq \pi/2$. Vi får

$$2 \iiint_V z \, dV = 2 \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi/2} \sin\varphi \cos\varphi \, d\varphi \int_0^2 \rho^3 \, d\rho.$$

Integralen över φ kan vi beräkna exempelvis med hjälp av dubbla vinkeln: $\sin\varphi \cos\varphi = \frac{1}{2}\sin 2\varphi$, vilket ger slutligen

$$2 \iiint_V z \, dV = 2 \cdot 2\pi \cdot \frac{1}{2} \cdot 4 = 8\pi,$$

vilket är samma flöde som vi fann i (a)-uppgiften.