Tentamen
TMA044 Flervariabelanalys - Omtenta E2 (med lösningar)

2017-12-19 kl. 8.30–12.30

Examinator: Daniel Persson, Matematiska vetenskaper, Chalmers

Telefonvakt: Milo Viviani, telefon: anknytning 5325

Hjälpmedel: endast bifogat formelblad, ej räknedosa

För godkänt på tentan krävs antingen 25 poäng på godkäntdelens två delar sammanlagt, eller att båda delarna är godkända var för sig. För godkänt på del 1 krävs minst 10 poäng, för godkänt på del 2 krävs 13 poäng. Erhållen poäng på någon av delarna får ersätta poäng på motsvarande del på senare tentamen tills kursen ges nästa läsår. För att få slutbetyg på kursen skall också Matlabmomentet vara godkänt. För betyg 4 eller 5 krävs dessutom 33 resp. 42 poäng sammanlagt på tentamens alla delar.

Lösningar läggs ut på kursens webbsida första vardagen efter tentamensdagen. Tentan rättas och bedöms anonymt. Resultat meddelas via Ladok ca. tre veckor efter tentamenstillfället. Första granskningstillfälle meddelas på kurswebbsidan, efter detta sker granskning alla vardagar 9-13, MV:s exp.

Godkäntdelen, del 1

Uppgift 1 och 2 se sidan 4

Godkäntdelen, del 2

Uppgift 3-7 se sidan 5

Överbetygsdelen

Endast om man ligger enstaka poäng från godkänt och presterat riktigt bra på någon av följande uppgifter kan poäng på denna del räknas in för att nå godkäntgränsen. Normalt krävs för poäng på uppgift att man redovisat en fullständig lösningsgång, som i princip lett, eller åtminstone skulle kunnat leda, till målet.

8. Låt $\mathbf{F}(x,y,z)$ vara ett vektorfält med vektorpotential $\mathbf{A}(x,y,z) = xz\mathbf{i} + (2xz+xy)\mathbf{j} + 3xy\mathbf{k}$, dvs vi kan skriva

$$\mathbf{F} = \nabla \times \mathbf{A}.$$

(a) Beräkna vektorfältet $\mathbf{F}$. (2p)

Lösning: Vi beräknar kryssprodukten:

$$\mathbf{F} = \nabla \times \mathbf{A} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ A_1 & A_2 & A_3 \end{vmatrix} = \cdots = x\mathbf{i} + (x-3y)\mathbf{j} + (y+2z)\mathbf{k}$$

(b) Låt S vara halvsfären $x^2 + y^2 + (z-1)^2 = 1$, $z \leq 1$. Beräkna flödet

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{n}} \, dS$$

ut genom S med hjälp av Stokes sats. (4p)

Lösning: Stokes sats ger att

$$\iint_S (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot \hat{\mathbf{n}} \, dS = \oint_{\mathcal{C}=\partial S} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r},$$

där $\mathcal{C}$ är randen till S med orientering. Randen är en cirkel i planet $z = 1$ med radie $r = 1$, och eftersom normalen till S pekar nedåt måste randen enligt högerhandsregeln ha medurs orientering. Vi kan alltså parametrisera randen med hjälp av

$$x(t) = \cos t, \qquad y(t) = \sin t, \qquad z = 1,$$

där t går från $t = 2\pi$ till $t = 0$. Kurvintegralen blir då

$$\begin{aligned}
\oint_{\mathcal{C}} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} &= \oint_{\mathcal{C}} (xz, 2xz + xy, 3xy) \cdot (dx, dy, dz) \\
&= -\int_0^{2\pi} (\cos t, 2\cos t + \sin t \cos t, 3\sin t \cos t) \cdot (-\sin t, \cos t, 0) dt \\
&= -\int_0^{2\pi} (-\sin t \cos t + 2\cos^2 t + \sin t \cos^2 t) dt. \qquad (1)
\end{aligned}$$

Nu utnyttjar vi att funktionerna $-\sin t \cos t$ samt $\sin t \cos^2 t$ är båda udda omkring $t = \pi$ och deras respective integraler från 0 till 2π bidrar därför med noll till kurvintegralen. Således har vi att den totala integralen reducerar till

$$\oint_{\mathcal{C}} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} = -2\int_0^{2\pi} \cos^2 t \, dt = -\int_0^{2\pi} (1 + \cos 2t) \, dt = -2\pi.$$

9. Låt $\mathbf{F} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ vara ett överallt definierat vektorfält.

(a) Låt $\mathcal{C}_1$ och $\mathcal{C}_2$ vara två kurvor som börjar i en punkt P_1 och slutar i en punkt P_2. Använd Greens sats för att beräkna skillnaden $\int_{\mathcal{C}_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} - \int_{\mathcal{C}_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ i termer av dubbelintegraler. (4p)

(b) Använd ovanstående observation och lämpliga identiteter för att bevisa att om $\mathbf{F}$ är konservativt, så är arbetsintegralen oberoende av väg. (2p)

Lösning: Se lösning till uppg. 9 på tentan 2015-10-29

10. Betrakta vektorfältet $\mathbf{F}(x, y) = \left(\frac{-y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}\right)$, definierat för alla $(x, y) \neq (0, 0)$.

(a) Visa att $\nabla \times \mathbf{F} = 0$, men att arbetsintegralen för alla slutna kurvor som går ett varv runt origo är icke-noll. (4p)

(b) Förklara varför $\mathbf{F}$ inte kan vara konservativ. (2p)

Lösning: Se lösning till uppg. 10 på tentan 2016-01-04.

Formelblad för TMA044

Trigonometri.

$$\cos(x+y) = \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y)$$

$$\sin(x+y) = \sin(x)\cos(y) + \cos(x)\sin(y)$$

$$\cos(x)\cos(y) = \frac{1}{2}(\cos(x-y) + \cos(x+y))$$

$$\sin(x)\sin(y) = \frac{1}{2}(\cos(x-y) - \cos(x+y))$$

$$\sin(x)\cos(y) = \frac{1}{2}(\sin(x-y) + \sin(x+y))$$

$$\tan(x+y) = \frac{\tan(x)+\tan(y)}{1-\tan(x)\tan(y)}$$

Integralkatalog

$$\int x^a\,dx = \frac{x^{a+1}}{a+1} + C \quad , \quad a \neq -1$$

$$\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + C$$

$$\int \sin x\,dx = -\cos x + C$$

$$\int \cos x\,dx = \sin x + C$$

$$\int \frac{1}{\cos^2 x}\,dx = \tan x + C$$

$$\int \frac{1}{\sin^2 x}\,dx = -\cot x + C$$

$$\int e^x\,dx = e^x + C$$

$$\int a^x\,dx = \frac{a^x}{\ln a} + C \;,\; 0 < a \neq 1$$

$$\int \frac{1}{x^2+a^2}\,dx = \frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a} + C \;,\; a \neq 0$$

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \ln|f(x)| + C$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{a-x^2}}\,dx = \arcsin\frac{x}{\sqrt{a}} + C \;,\; a > 0$$

$$\int \sqrt{a-x^2}\,dx = \frac{1}{2}x\sqrt{a-x^2} + \frac{a}{2}\arcsin\frac{x}{\sqrt{a}} + C \;,\; a > 0$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+a}}\,dx = \ln|x+\sqrt{x^2+a}| + C \;,\; a \neq 0$$

$$\int \sqrt{x^2+a}\,dx = \frac{1}{2}(x\sqrt{x^2+a} + a\ln|x+\sqrt{x^2+a}|) + C$$

Maclaurinutvecklingar

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{k!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots$$

$$\sin x = \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}\frac{x^{2k-1}}{(2k-1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots$$

$$\cos x = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^{k}\frac{x^{2k}}{(2k)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots$$

$$(1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^{\infty}\binom{\alpha}{k}x^k = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \ldots \quad , \quad |x| < 1 \quad , \quad \binom{\alpha}{k} = \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-k+1)}{k(k-1)\ldots 1}$$

$$\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{x^k}{k} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots \quad , \quad -1 < x \leq 1$$

$$\arctan x = \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}\frac{x^{2k-1}}{2k-1} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \ldots \quad , \quad |x| \leq 1$$

Övrigt

Masscentrum (x_T, y_T, z_T) för Ω ges av $x_T = \dfrac{\iiint_\Omega x\rho(x,y,z)\,dxdydz}{\iiint_\Omega \rho(x,y,z)\,dxdydz}$, analogt för y_T, z_T.

$\rho(x,y,z)$ är densiteten.

Anonym kod	TMA044 Flervariabelanalys - Omtenta E2 (med lösningar) 2017-12-1

Godkäntdelen: del 1

1. Till nedanstående uppgifter skall korta lösningar redovisas, samt svar anges, på separat skrivpapper.

(a) i. Ange om följande är sant eller falskt.
Påstående: *Komplementet till en sluten boll är en öppen mängd.* (0.5p)

Svar: Sant.

ii. Låt $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ vara en differentierbar funktion. Vilket eller vilka av följande påståenden är sanna? Ni får ringa in *max tre alternativ* (bokstäver); för fler än tre angivna alternativ blir det 0 poäng. Varje rätt svar ger 0.5p. (1.5p)

A Om f har kontinuerliga partiella derivator i en omgivning till (a, b), så är f differentierbar i (a, b).

B Om f:s partiella derivator existerar i (a, b), så är f differentierbar i (a, b).

C Gradienten kan ses som en flervariabel analog till derivatan av en funktion $f(x)$.

D Hessianen kan ses som en flervariabel analog till derivatan av en funktion $f(x)$.

E Om U är en öppen mängd och begränsad mängd i $\mathbb{R}^2$, så existerar nödvändigtvis globalt max i U.

F Om U är en sluten mängd och begränsad mängd i $\mathbb{R}^2$, så existerar nödvändigtvis globalt max i U.

G Om U är en begränsad mängd i $\mathbb{R}^2$, så existerar nödvändigtvis globalt max i U.

Svar: *Rätt svar är* **A, C, F**

(b) Låt $f(x, y, z) = \sin(y) + \cos(xy) - yz$. Bestäm ekvationen för tangentplanet till nivåytan $f(x, y, z) = 1 + \pi$ i punkten $(1, \pi/2, -2)$. Bestäm också riktningsderivatan till f i samma punkt i riktning $\frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, 1)$. (3p)

Lösning: Ytan kan beskrivas som nivåytan

$$f(x, y, z) = \sin(y) + \cos(xy) - yz = \pi + 1.$$

Vi beräknar gradienten

$$\nabla f(x, y, z) = (-y \sin xy, \cos y - x \sin xy, -y)$$

och utvärderar den i punkten $(1, \pi/2, -2)$:

$$\nabla f(1, \pi/2, -2) = (-\pi/2, -1, -\pi/2)$$

Ekvationen för tangentplanet i punkten $\mathbf{a} = (1, \pi/2, -2)$ blir således

$$\nabla f(1, \pi/2, -2) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{a}) = 0$$

vilket blir

$$-\frac{\pi}{2}(x-1) - (y - \frac{\pi}{2}) - \frac{\pi}{2}(z+2) = 0.$$

Vi kan slutligen skriva detta på den mer kompakta formen

$$\pi x + y + \pi z = 0.$$

För att beräkna riktningsderivatan av f i riktning $\frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)$ definierar vi

$$\mathbf{u} = \tfrac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1).$$

Vi har då

$$D_{\mathbf{u}} f(1, \pi/2, -2) = \mathbf{u} \cdot \nabla f(1, \pi/2, -2) = \tfrac{1}{\sqrt{3}}(-\tfrac{\pi}{2} - 1 - \tfrac{\pi}{2}) = -\tfrac{1}{\sqrt{3}}(\pi + 1)$$

(c) Låt $\mathcal{C}$ vara kurvan i $\mathbb{R}^3$ som ges av ekvationerna

$$z = \frac{x^2}{2}, \qquad y = \frac{2\sqrt{2}}{3} x^{3/2},$$

med $x \in \mathbb{R}_{\geq 0}$.

i. Bestäm en parametrisering $\mathbf{r}(t)$ av $\mathcal{C}$. (1p)

Lösning: Vi kan parametrisera kurvan genom att sätta $x(t) = t, \ t \in \mathbb{R}_{\geq 0}$, och således blir positionvektorn

$$\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + \frac{2\sqrt{2}}{3} t^{3/2} \mathbf{j} + \frac{1}{2} t^2 \mathbf{k}.$$

ii. Bestäm längden av $\mathcal{C}$ mellan $t = 0$ och $t = 1$ genom att ställa upp den relevanta kurvintegralen och beräkna den. (1p)

Lösning: Kurvlängden ges av integralen

$$\int_{\mathcal{C}} ds = \int_0^1 \left| \frac{d\mathbf{r}(t)}{dt} \right| dt.$$

Vi beräknar hastigheten

$$\frac{d\mathbf{r}(t)}{dt} = \mathbf{i} + \sqrt{2t}\,\mathbf{j} + t\mathbf{k}$$

och farten

$$\left| \frac{d\mathbf{r}(t)}{dt} \right| = \sqrt{1 + 2t + t^2} = \sqrt{(1+t)^2} = 1 + t.$$

Således får vi kurvlängden till

$$\int_0^1 (1+t) dt = 3/2.$$

(d) Låt $f(x, y, z) = x^2 y^3 z^2 + z$ och låt $g(t)$ vara en differentierbar funktion. Sätt $\mathbf{r}(t) = e^t \mathbf{i} + \cos t\, \mathbf{j} + g(t)\mathbf{k}$ och beräkna $\frac{d}{dt} f(\mathbf{r}(t))$. (2p)

Lösning: Vi beräknar först

$$f(\mathbf{r}(t)) = e^{2t} \cos^3 t\, g(t)^2 + g(t).$$

Vi deriverar nu denna genom att använda en kombination av produktregeln och kedjeregeln:

$$\frac{d}{dt}f(\mathbf{r}(t)) = 2\,e^{2t}\ \cos^3 t\, g(t)^2 + e^{2t}\, 3\cos^2 t\,(-\sin\, t)\, g(t)^2 + e^{2t}\ \cos^3 t\, 2g(t)\, g'(t) + g'(t).$$

Vi kan förenkla detta något:

$$\frac{d}{dt}f(\mathbf{r}(t)) = e^{2t}\ \cos^2 t\,\Big(2\cos\, t\, g(t)^2 - 3\sin\, t\, g(t)^2 + 2\cos\, t\, g(t)\, g'(t)\Big) + g'(t).$$

Till följande uppgift skall fullständig lösning redovisas på separat skrivpapper. Motivera och förklara så väl du kan.

2. Låt $f(x, y) = -2x + 2y + x^2 + y^2$.

(a) Bestäm och klassificera de kritiska punkterna till $f(x, y)$. (2p)

Lösning: Kritiska punkter fås genom att lösa ekvationssystemet $\nabla f(x, y) = (0, 0)$, dvs

$$-2 + 2x = 0$$

$$2 + 2y = 0$$

Det finns endast en lösning: $(x, y) = (1, -1)$. För att karaktärisera punkten beräknar vi Hessianen:

$$H(f) = \begin{pmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{21} & f_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Vi har $f_{11} > 0$ samt $\det H > 0$ och således är detta en minpunkt.

(b) Hitta max och min till $f(x, y)$ på disken $x^2 + y^2 \leq 1$. (2p)

Lösning: Eftersom den globala kritiska punkten $(1, -1)$ ligger utanför disken $x^2+y^2 \leq 1$ så måste extremvärden på disken ligga på randen $x^2 + y^2 = 1$. Vi kan parametrisera randen med

$$x(t) = \cos t, \qquad y(t) = \sin t, \qquad 0 \leq t \leq 2\pi.$$

På randen definierar vi funktionen

$$g(t) = f(\mathbf{r}(t)) = -2\cos t + 2\sin t + \cos^2 t + \sin^2 t = 2(\sin\, t - \cos\, t) + 1.$$

Vi söker kritiska punkter:

$$g'(t) = 2(\cos\, t + \sin\, t) = 0$$

vilket medför

$$\cos\, t = -\sin\, t.$$

Detta innebär alltså att det finns kritiska punkter då $x = -y$ på randen, dvs då $x^2 + y^2 = 1$. De enda punkterna som uppfyller båda dessa villkor är

$$x = \frac{1}{\sqrt{2}},\ y = -\frac{1}{\sqrt{2}}, \qquad\qquad x = -\frac{1}{\sqrt{2}},\ y = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Funktionens värden i dessa punkter är:

$$f\left(\tfrac{1}{\sqrt{2}}, -\tfrac{1}{\sqrt{2}}\right) = 1 - 2\sqrt{2}$$

$$f\left(-\tfrac{1}{\sqrt{2}}, \tfrac{1}{\sqrt{2}}\right) = 1 + 2\sqrt{2}$$

och således drar vi slutsatsen att $(x, y) = \left(\tfrac{1}{\sqrt{2}}, -\tfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$ är en minpunkt och $(x, y) = \left(-\tfrac{1}{\sqrt{2}}, \tfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$ är en maxpunkt.

(c) Bestäm Taylorpolynomet till $f(x, y)$ i punkten $(0, 0)$ till andra ordningen i x och y. (1p)

Lösning: Taylorpolynomet av $f(x, y)$ kring (a, b) ges i allmänhet till andra ordningen i $h = x - a$ och $k = y - b$ av

$$f(x, y) = f(a, b) + f_1(a, b)h + f_2(a, b)k + \frac{1}{2}\big(h^2 f_{11}(a, b) + 2hk f_{12}(a, b) + k^2 f_{22}(a, b)\big) + \cdots$$

Vi söker utvecklingen kring $(a, b) = (0, 0)$ vilket då ges av

$$f(x, y) = 0 - 2x + 2y + \frac{1}{2}\big(2x^2 + 2y^2\big) + \cdots = 2(y - x) + x^2 + y^2 + \cdots$$

Anonym kod	**TMA044 Flervariabelanalys - Omtenta E2 (med lösningar) 2017-12-1**

Godkäntdelen: del 2

Till uppgift 3 nedan räcker det med svar (ingen motivering behövs), men för uppgift 4-7 skall fullständiga lösningar redovisas. Motivera och förklara så väl du kan. Alla lösningar anges på separat skrivpapper.

3. (a) Ange om följande är sant eller falskt.
Påstående: *Om* $\mathbf{F} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ *är ett vektorfält så är vektorn* $\mathbf{F}(x, y)$ *parallell med fältlinjen som skär punkten* (x, y). (0.5p)

Svar: Sant.

(b) Vilka av följande påståenden stämmer för dubbelintegralen $\iint_D f(x, y)dA$ av en positiv, integrerbar funktion $f(x, y)$ på en domän $D \subset \mathbb{R}^2$? Varje rätt svar ger 0.5p. (1.5p)

A Integralen är en vektor i $\mathbb{R}^2$.

B Värdet av integralen är ett tal som representerar volymen av soliden under grafen $z = f(x, y)$ och ovanför D.

C Om $f = 1$ beräknar integralen även arean av D.

D Om D är en rektangel i $\mathbb{R}^2$ så spelar det ingen roll vilken ordning vi utför integralen.

E Om D är angiven på x-enkel form så *måste* vi börja att integrera över x.

Svar: B, C, D är rätt.

4. Låt $\mathcal{C}$ vara kvartscirkelbågen i $\mathbb{R}^2$ som sammanbinder punkterna $(2, 0)$ och $(1, 1)$. Beräkna kurvintegralen

$$\int_{\mathcal{C}} x^2\,dy - 2y\,dx.$$

(3p)

Lösning: Eftersom kvartcirkeln är en del av en cirkel med centrum i $(x, y) = (1, 0)$ så parametriseras den med

$$x(t) = 1 + \cos t, \qquad y(t) = \sin t, \qquad 0 \le t \le \pi/2.$$

Integralen blir då

$$\begin{aligned}
\int_{\mathcal{C}} x^2\,dy - 2y\,dx &= \int_0^{\pi/2} \Big(x(t)^2\, y'(t) - 2y(t)\, x'(t)\Big) dt &(2)\\
&= \int_0^{\pi/2} \Big((1+\cos t)^2 \cos t - 2\sin t\,(-\sin t)\Big)\, dt\\
&= \int_0^{\pi/2} \Big(2 + \cos t + \cos^3 t\Big)\, dt, &(3)
\end{aligned}$$

där vi använt trigonometriska ettan för att komma till den sista raden.

Vi kan dela upp detta i två integraler, och vi börjar med

$$\int_0^{\pi/2} (2 + \cos\, t)\, dt = \Big[2t + \sin\, t\Big]_0^{\pi/2} = \pi + 1.$$

Den andra integralen ges av

$$\int_0^{\pi/2} \cos^3\, t\, dt = \int_0^{\pi/2} \cos\, t\, (1 - \sin^2\, t)\, dt = \{u = \sin t\} = \int_0^1 (1 - u^2)\, du = 1 - \frac{1}{3}.$$

Det slutliga resultatet blir alltså

$$\int_{\mathcal{C}} x^2\, dy - 2y\, dx = \pi + 1 + 1 - \frac{1}{3} = \pi + \frac{5}{3}.$$

5. Beräkna volymen under paraboloiden $z = 1 - x^2 - y^2$ och ovanför området $D \subset \mathbb{R}^2$ som begränsas av paraboloiden samt $-x \leq y \leq \sqrt{3}x, x \geq 0$. (3p)
Tips: arctan $\sqrt{3} = \pi/3$.

Lösning: Vi börjar med att ta reda på hur skärningskurvan ser ut i xy-planet. I planet har vi $z = 0$ och alltså blir skärningskurvan

$$1 - x^2 - y^2 = 0$$

vilket motsvarar en cirkel med $r = 1$. Men vi skall inte beräkna volymen ovanför hela disken $x^2 + y^2 \leq 1$, utan endast ovanför den sektor som begränsas av $-x \leq y \leq \sqrt{3}x$. Dessa olikheter anger två linjer

$$y = -x \qquad\qquad y = \sqrt{3}x$$

och vi är alltså intresserade av cirkelsektorn mellan dem. Vi beskriver enklast denna sektor med polära koordinater och vi söker vinkeln θ mellan linjerna. Linjen $y = -x$ har vinkel $-\pi/4$ med x-axeln. Linjen $y = \sqrt{3}x$ har vinkel φ med x-axeln, där $\tan\varphi = \sqrt{3}$. Således har vi $\varphi = \arctan\sqrt{3} = \pi/3$. Totala vinkelsegmentet kan alltså parametriseras med $-\pi/4 \leq \theta \leq \pi/3$. Nu kan vi ställa upp integralen som ger volymen:

$$\iint_D f(x, y)\, dA = \iint_D (1 - x^2 - y^2)\, dA = \int_{-\pi/4}^{\pi/3} d\theta \int_0^1 (1 - r^2) r\, dr.$$

Integralerna är oberoende av varandra och vi kan beräkna dem var för sig:

$$\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4}\right)\left[\frac{r^2}{2} - \frac{r^4}{4}\right]_0^1 = \frac{7\pi}{48}.$$

6. Låt $\mathbf{F}(x,y) = (-y,x)$.

(a) Beräkna arbetet som vektorfältet $\mathbf{F}$ utför längs kurvan $\mathcal{C}$ som parametriseras av $\mathbf{r}(t) = (t^2, t^3 - t), 0 \le t \le 1$. (3p)

(b) Använd Greens sats för att räkna ut arean till området R som $\mathcal{C}$ omsluter. (2p)

Lösning: Om $x(t) = t^2$ och $y(t) = t^3 - t$ får vi direkt att $dx = 2tdt, dy = (3t^2 - 1)dt$. Insättning ger då att det utförda arbetet ges av

$$\begin{aligned} \oint_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} &= \int_0^1 -(t^3 - t)2tdt + t^2(3t^2 - 1)dt \\ &= \int_0^1 (t^4 + t^2)dt \\ &= \left[\frac{t^5}{5} + \frac{t^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1}{5} + \frac{1}{3} = \frac{8}{15} \end{aligned} \tag{4}$$

(b) Greens sats ger

$$\oint_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_R \Big(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\Big) dxdy = 2 \iint_R dA = 2 \cdot \text{area}(R). \tag{5}$$

Alltså får vi från resultatet i (a) att arean av R ges av

$$\text{area}(R) = \frac{1}{2} \oint_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \frac{4}{15}. \tag{6}$$

7. Låt C vara cylindern i $\mathbf{R}^3$ som bestäms av $x^2 + y^2 \le a^2$ samt $-3 \le z \le 3$.

(a) Beräkna flödet av vektorfältet $\mathbf{F}(x,y,z) = (x,y,z)$ upp genom toppen och ner genom botten av C. (3p)

Lösning: Vi betecknar botten av cylindern med C_b och toppen med C_t. Dessa är diskar med radie a i $z = -3$ och $z = 3$. Normalen på toppen kan väljas till $\hat{\mathbf{n}}_t = \mathbf{k}$ och på botten har vi $\hat{\mathbf{n}}_b = -\mathbf{k}$. Flödet upp genom toppen blir då

$$\mathcal{F}_t = \iint_{C_t} \mathbf{F}(x,y,z) \cdot \hat{\mathbf{n}}_t \, dS = \iint_D \mathbf{F}(x,y,3) \cdot \mathbf{k} \, dx\, dy = 3 \iint_D dx\, dy = 3\, \text{area}(D) = 3\pi a^2$$

där D är disken $x^2 + y^2 \le a^2$. På samma sätt får vi flödet genom botten till

$$\mathcal{F}_b = \iint_{C_b} \mathbf{F}(x,y,z) \cdot \hat{\mathbf{n}}_b \, dS = -\iint_D \mathbf{F}(x,y,-3) \cdot \mathbf{k} \, dx\, dy = 3 \iint_D dx\, dy = 3\, \text{area}(D) = 3\pi a^2$$

(b) Använd dina resultat i (a) tillsammans med Gauss sats för att beräkna flödet av $\mathbf{F}(x, y, z)$ ut genom mantelytan av C. (2p)

Lösning: Enligt Gauss sats kan vi beräkna totala flödet genom volymsintegralen av divergensen:

$$\mathcal{F}_{tot} = \iiint_C \nabla \cdot \mathbf{F} \, dV = \oiint_{\partial C} \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{n}} \, dS = \mathcal{F}_t + \mathcal{F}_b + \mathcal{F}_m,$$

där $\mathcal{F}_m$ betecknar flödet ut genom mantelytan. Totala flödet blir

$$\mathcal{F}_{tot} = \iiint_C \nabla \cdot \mathbf{F} \, dV = \iiint_C \left(\frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z} \right) dV = 3 \iiint_C dV = 3 \, \mathrm{vol}(C) = 3 \cdot 6 \cdot \pi a^2 = 18\pi a^2.$$

Vi kan nu slutligen bestämma flödet genom mantelytan genom att kombinera detta med resultaten i (a):

$$\mathcal{F}_m = \mathcal{F}_{tot} - \mathcal{F}_b - \mathcal{F}_t = 18\pi a^2 - 3\pi a^2 - 3\pi a^2 = 12\pi a^2.$$