Tentamen
TMA044 Flervariabelanalys - Tentamen E2 (med lösningar)

2018-10-31 kl. 14–18.00

Examinator: Daniel Persson, Matematiska vetenskaper, Chalmers

Telefonvakt: Felix Held , telefon: anknytning 6792

Hjälpmedel: endast bifogat formelblad, ej räknedosa

För godkänt på tentan krävs antingen 25 poäng på godkäntdelens två delar sammanlagt, eller att båda delarna är godkända var för sig. För godkänt på del 1 krävs minst 10 poäng, för godkänt på del 2 krävs 13 poäng. Erhållen poäng på någon av delarna får ersätta poäng på motsvarande del på senare tentamen tills kursen ges nästa läsår. För att få slutbetyg på kursen skall också Matlabmomentet vara godkänt. För betyg 4 eller 5 krävs dessutom 33 resp. 42 poäng sammanlagt på tentamens alla delar.

Lösningar läggs ut på kursens webbsida första vardagen efter tentamensdagen. Tentan rättas och bedöms anonymt. Resultat meddelas via Ladok ca. tre veckor efter tentamenstillfället. Första granskningstillfälle meddelas på kurswebbsidan, efter detta sker granskning alla vardagar 9-13, MV:s exp.

Godkäntdelen, del 1

Uppgift 1 och 2 se sidan 4

Godkäntdelen, del 2

Uppgift 3-8 se sidan 5

Överbetygsdelen

Endast om man ligger enstaka poäng från godkänt och presterat riktigt bra på någon av följande uppgifter kan poäng på denna del räknas in för att nå godkäntgränsen. Normalt krävs för poäng på uppgift att man redovisat en fullständig lösningsgång, som i princip lett, eller åtminstone skulle kunnat leda, till målet.

9. (a) Formulera och bevisa Gauss sats för ett vektorfält på formen $F(x, y, z) = F_3(x, y, z)\mathbf{k}$. Det räcker att anta att domänen V är på z-enkel form, dvs att x, y-gränserna är fixerade men z gränserna är x, y-beroende. (3p)

(b) Bevisa identiteterna (3p)

$$\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{F}) = 0$$

$$\nabla \times (\nabla \phi) = 0$$

för ett godtyckligt vektorfält $\mathbf{F}(x, y, z)$ samt godtycklig funktion $\phi(x, y, z)$.

Lösning: Se Adams, kap. 16.2 och 16.4.

10. Använd Stokes sats för att beräkna kurvintegralen $\oint_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$, där $\mathcal{C}$ är kurvan som utgör skärningen mellan konen $z^2 = x^2 + y^2$ och planet $z = 1$, och $\mathbf{F}$ är vektorfältet

$$\mathbf{F}(x, y, z) = \left(\sin x - \frac{y^3}{3}\right)\mathbf{i} + \left(\cos y + \frac{x^3}{3}\right)\mathbf{j} + xyz\mathbf{k}.$$

(6p)

Lösning: Stokes sats ges av

$$\iint_S \nabla \times \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS = \oint_{\mathcal{C}=\partial S} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}.$$

För att använda Stokes sats skall vi alltså beräkna ytintegralen i vänsterledet. Vad är S? Detta är en yta som har $\mathcal{C}$ som rand. Kurvan $\mathcal{C}$ är enhetscirkeln i planet $z = 1$ med centrum i origo. Det finns två naturliga ytor som har $\mathcal{C}$ som rand: disken D i planet $z = 1$ som utgörs av $x^2 + y^2 \leq 1$, samt den del K av konen $z^2 = x^2 + y^2$ som begränsas av $0 \leq z \leq 1$. Båda dessa ytor har $\mathcal{C}$ som moturs orienterad rand. Stokes sats skall alltså ge samma svar för båda ytorna. Vi väljer att använda ytan D eftersom den är enklare.

Vi beräknar rotationen av $\mathbf{F}$:

$$\nabla \times \mathbf{F} = xz\mathbf{i} - yz\mathbf{j} + (x^2 + y^2)\mathbf{k}.$$

Normalen till D utgörs av $\mathbf{k}$ så ytintegralen blir

$$\iint_D \nabla \times \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS = \iint_D (x^2 + y^2) dS = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 r^3 dr = \frac{\pi}{2}.$$

11. Betrakta vektorfältet $\mathbf{F}(x, y) = \left(\frac{-y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}\right)$, definierat för alla $(x, y) \neq (0, 0)$.

(a) Visa att $\nabla \times \mathbf{F} = 0$, men att arbetsintegralen för alla slutna kurvor som går ett varv runt origo är icke-noll. (4p)

(b) Förklara varför $\mathbf{F}$ inte kan vara konservativ. (2p)

Lösning: Det är en enkel beräkning att $\nabla \times \mathbf{F} = 0$ utanför origo. Vi kontrollerar först att den slutna kurvan parametriserad av $\mathbf{r}(t) = (\cos t, \sin t), 0 \leq t \leq 2\pi$ har en arbetsintegral som är icke-noll. Integralen blir i det fallet, $\int_0^{2\pi} \mathbf{F} \cdot \frac{d\mathbf{r}(t)}{dt} dt = \int_0^{2\pi} - \sin t(-\sin t) dt + \cos t + \cos t \cos t dt = \int_0^{2\pi} dt = 2\pi$. Givet en annan kurva γ som går exakt ett varv moturs runt origo, låt D vara området mellan γ och $\mathbf{r}(t)$. Enligt Greens sats är skillnaden mellan arbetsintegralerna längs γ och $\mathbf{r}(t)$ en dubbelintegral över D, med integrand $\nabla \times \mathbf{F} \cdot \mathbf{k} = 0$, alltså ger de samma svar.

Slutligen, $\mathbf{F}$ kan inte vara konservativ eftersom för konservativa vektorfält så är arbetsingraler enbart beroende av punkterna där kurvan börjar och slutar. Om nu vi tar två arbetsintegraler som börjar och slutar i $(1, 0)$, t.ex. $\mathbf{r}(t)$ och den konstanta kurvan $\mathbf{l}(t) = (1, 0)$, ser vi att i det ena fallet är arbetsintegralen 2π, i det andra fallet 0. Alltså kan $\mathbf{F}$ inte vara konservativ.

Formelblad för TMA044

Trigonometri.

$\cos(x+y) = \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y)$

$\sin(x+y) = \sin(x)\cos(y) + \cos(x)\sin(y)$

$\cos(x)\cos(y) = \frac{1}{2}(\cos(x-y) + \cos(x+y))$

$\sin(x)\sin(y) = \frac{1}{2}(\cos(x-y) - \cos(x+y))$

$\sin(x)\cos(y) = \frac{1}{2}(\sin(x-y) + \sin(x+y))$

$\tan(x+y) = \frac{\tan(x)+\tan(y)}{1-\tan(x)\tan(y)}$

Integralkatalog

$$\int x^a\,dx = \frac{x^{a+1}}{a+1} + C \quad , \quad a \neq -1$$

$$\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + C$$

$$\int \sin x\,dx = -\cos x + C$$

$$\int \cos x\,dx = \sin x + C$$

$$\int \frac{1}{\cos^2 x}\,dx = \tan x + C$$

$$\int \frac{1}{\sin^2 x}\,dx = -\cot x + C$$

$$\int e^x\,dx = e^x + C$$

$$\int a^x\,dx = \frac{a^x}{\ln a} + C \;,\; 0 < a \neq 1$$

$$\int \frac{1}{x^2+a^2}\,dx = \frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a} + C \;,\; a \neq 0$$

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \ln|f(x)| + C$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{a-x^2}}\,dx = \arcsin\frac{x}{\sqrt{a}} + C \;,\; a > 0$$

$$\int \sqrt{a-x^2}\,dx = \frac{1}{2}x\sqrt{a-x^2} + \frac{a}{2}\arcsin\frac{x}{\sqrt{a}} + C \;,\; a > 0$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+a}}\,dx = \ln|x+\sqrt{x^2+a}| + C \;,\; a \neq 0$$

$$\int \sqrt{x^2+a}\,dx = \frac{1}{2}(x\sqrt{x^2+a} + a\ln|x+\sqrt{x^2+a}|) + C$$

Maclaurinutvecklingar

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$$

$$\sin x = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1}\frac{x^{2k-1}}{(2k-1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots$$

$$\cos x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots$$

$$(1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} x^k = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \dots \quad , \quad |x| < 1 \quad , \quad \binom{\alpha}{k} = \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-k+1)}{k(k-1)\dots 1}$$

$$\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1}\frac{x^k}{k} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots \quad , \quad -1 < x \leq 1$$

$$\arctan x = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1}\frac{x^{2k-1}}{2k-1} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots \quad , \quad |x| \leq 1$$

Övrigt

Masscentrum (x_T, y_T, z_T) för Ω ges av $x_T = \frac{\iiint_\Omega x\rho(x,y,z)\,dxdydz}{\iiint_\Omega \rho(x,y,z)\,dxdydz}$, analogt för y_T, z_T.

$\rho(x,y,z)$ är densiteten.

Anonym kod	**TMA044 Flervariabelanalys - Tentamen E2 (med lösningar) 2018-10-**

Godkäntdelen: del 1

1. Till nedanstående uppgifter skall svar anges på separat skrivpapper.

(a) i) Grafen till funktionen $f(x, y) = x$ är

A. En linje i yz-planet
B. En linje i xy-planet
C. Ett plan som ligger "tiltat" i förhållande till koordinatplanen.
D. Ett plan som ligger parallellt med xy-planet.

(0.5p)

Svar: C

ii) Vilken av följande punkter ligger närmast punkten $(1, 2, 3) \in \mathbb{R}^3$?

A. $(3, 0, 3)$
B. $(0, 4, 2)$
C. $(2, 4, 1)$
D. $(2, 3, 4)$

(0.5p)

Svar: D

iii) **Påstående:** Varje yta S som ges av en ekvation på formen $G(x, y, z) = 0$, för någon funktion $G(x, y, z)$, kan även beskrivas som grafen till någon funktion $f(x, y)$, dvs $z = f(x, y)$.

A. Sant
B. Falskt

(0.5p)

Svar: Falskt

(b) Låt $f(x, y) = x^4 + y^3 + x^2 + y$.

i. Bestäm ekvationen för tangentplanet till funktionsytan $z = f(x, y)$ i punkten $(x, y) = (1, 1)$. (1.5p)

ii. Ange normalen $\mathbf{n}$ till tangentplanet ovan i $(x, y) = (1, 1)$. (1p)

Lösning: Ekvationen för tangentplanet till en funktionsyta $z = f(x, y)$ i punkten $(x, y) = (a, b)$ ges av

$$z = f(a, b) + f_1(a, b)(x - a) + f_2(a, b)(y - b).$$

De partiella derivatorna blir

$$f_1(x, y) = 4x^3 + 2x, \qquad f_2(x, y) = 3y^2 + 1$$

och i punkten $(1, 1)$ har vi

$$f(1, 1) = 4, \qquad f_1(1, 1) = 6, \qquad f_2(1, 1) = 4.$$

Tangentplanets ekvation blir då

$$z = 4 + 6(x - 1) + 4(y - 1)$$

eller, något omskrivet,

$$6x + 4y - z = 6.$$

Normalen till en funktionsyta $z = f(x, y)$ ges av

$$\mathbf{n}(x, y) = -f_1(x, y)\mathbf{i} - f_2(x, y)\mathbf{j} + \mathbf{k}.$$

I punkten $(1, 1)$ har vi alltså normalen

$$\mathbf{n} = \mathbf{n}(1, 1) = -6\mathbf{i} - 4\mathbf{j} + \mathbf{k}$$

vilket är den efterfrågade normalen till tangentplanet i punkten $(1, 1)$.

(c) Låt $\mathcal{C} \subseteq \mathbb{R}^3$ vara kurvan som utgörs av lösningarna till ekvationssystemet

$$3x = z^3, \qquad \sqrt{2}y = z^2.$$

i. Ange en parametrisering av kurvan $\mathcal{C}$. (1p)

Lösning: Om vi skriver om ekvationssystemet som

$$x = \frac{1}{3}z^3, \qquad y = \frac{1}{\sqrt{2}}z^2$$

så ser vi att en parametrisering ges av

$$x(t) = \frac{1}{3}t^3, \qquad y(t) = \frac{1}{\sqrt{2}}t^2, \qquad z(t) = t.$$

Positionsvektorn blir därför

$$\mathbf{r}(t) = \frac{1}{3}t^3\mathbf{i} + \frac{1}{\sqrt{2}}t^2\mathbf{j} + t\mathbf{k}.$$

ii. Bestäm längden av det segment av $\mathcal{C}$ som sammanbinder punkterna $(0,0,0)$ och $(1/3, 1/\sqrt{2}, 1)$. (2p)

Lösning: Kurvlängden ges i allmänhet av

$$\ell = \int_{t_0}^{t_1} |\mathbf{r}'(t)| dt$$

I vår parametrisering har vi $\mathbf{r}(0) = (0,0,0)$ och $\mathbf{r}(1) = (1/3, 1/\sqrt{2}, 1)$, och således sätter vi $t_0 = 0$ och $t_1 = 1$ för vårt kurvsegment. Vi beräknar hastigheten

$$\mathbf{r}'(t) = t^2\mathbf{i} + \sqrt{2}t\mathbf{j} + \mathbf{k}$$

och farten

$$|\mathbf{r}'(t)| = \sqrt{t^4 + 2t^2 + 1} = \sqrt{(t^2+1)^2} = t^2 + 1.$$

Kurvlängden blir då

$$\ell = \int_0^1 (t^2+1)dt = \left[\frac{t^3}{3} + t\right]_0^1 = \frac{4}{3}.$$

(d) Låt $f = f(x,y)$ vara en två gånger differentierbar funktion, där $x = s^2 + t$ och $y = 2s - 3t^2$. Räkna ut $\frac{\partial^2 f}{\partial s \partial t}$ och $\frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s}$ i termer av partiella derivator av f. (3p)

Lösning:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial s \partial t} = \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s} = 2sf_{11} + (2 - 12st)f_{12} - 12tf_{22}.$$

Till följande uppgift skall fullständig lösning redovisas på separat skrivpapper. Motivera och förklara så väl du kan.

2. Låt $g(x, y) = xy^2 - 54$.

(a) Bestäm med hjälp av Lagranges metod det minsta avståndet från origo i $\mathbb{R}^2$ till nivåkurvan $g(x, y) = 0$. (3p)

(b) Bestäm Taylorpolynomet av $g(x, y)$ upp till ordning 2 i punkten $(2, 2)$. (1p)

Lösning: (a) Avståndet från origo $(0, 0)$ till en godtycklig punkt (x, y) ges av $\sqrt{x^2 + y^2}$. Räkningarna blir dock enklare om vi använder oss av det kvadrerade avståndet x^2+y^2 och minimerar det. Vi har alltså funktionen

$$f(x, y) = x^2 + y^2$$

som skall minimeras givet bivillkoret $g(x, y) = 0$. Enligt Lagranges metod måste vi då söka kritiska punkter till

$$L(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda g(x, y) = x^2 + y^2 + \lambda(xy^2 - 54).$$

Med andra ord söker vi lösningar till ekvationssystemet

$$\frac{\partial L}{\partial x} = 2x + \lambda y^2 = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial y} = 2y + 2\lambda xy = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = xy^2 - 54 = 0.$$

Från den andra ekvationen drar vi slutsatsen att

$$2y(1 + \lambda x) = 0$$

vilket har två lösningar: $y = 0$ eller $\lambda x = -1$. Lösningen $y = 0$ är dock inte kompatibel med den tredje ekvationen och kan därför ignoreras. Om vi multiplicerar den första ekvationen med x kan vi utnyttja lösningen $\lambda x = -1$ på följande vis:

$$0 = 2x^2 + \lambda xy^2 = 2x^2 - y^2.$$

Detta leder alltså till ekvationen

$$y^2 = 2x^2$$

med lösningar $y = \pm\sqrt{2}x$. Vi stoppar nu in detta i tredje ekvationen:

$$0 = xy^2 - 54 = x\big(\pm\sqrt{2}x\big)^2 - 54 = 2x^3 - 54.$$

Vi skriver om denna till ekvationen

$$x^3 = 27$$

som har lösning $x = 27^{1/3} = 3$. Vi har alltså två punkter som båda kandiderar till att ligga närmast origo:

$$(3, 3\sqrt{2}), \qquad (3, -3\sqrt{2}).$$

Dessa ligger båda på samma avstånd från origo:

$$\sqrt{3^3 + (\pm 3\sqrt{2})^2} = \sqrt{9 + 2 \cdot 9} = \sqrt{27} = 3\sqrt{3}.$$

Detta är alltså det minsta avståendet från kurvan $g(x, y) = 0$ till origo, och det uppmäts i båda punkterna $(3, \pm 3\sqrt{2})$.

Lösning: (b) Taylorpolynomet i punkten $(2, 2)$ ges till ordning 2 av

$$g(x, y) = -46 + 4h + 8k + 4hk + 2k^2$$

där $h = x - 2$ och $k = y - 2$.

Anonym kod	**TMA044 Flervariabelanalys - Tentamen E2 (med lösningar) 2018-10-**

Godkändtdelen: del 2

Till uppgift 3 nedan räcker det med svar (ingen motivering behövs), men för uppgift 4-7 skall fullständiga lösningar redovisas. Motivera och förklara så väl du kan. Alla lösningar anges på separat skrivpapper.

3. i) Låt R utgöra kvadraten som definieras av $-1 \le x \le 1$ samt $-1 \le y \le 1$. Tecknet på dubbelintegralen $\iint_R x^4 dA$ är då:

A positivt,

B negativt,

C noll,

D obestämbart (0.5p)

Svar: A

ii) Integralen $\int_0^1 \int_0^1 x^2 dA$ representerar (0.5p)

A Arean under kurvan $y = x^2$ mellan $x = 0$ och $x = 1$.

B Volymen under ytan $z = x^2$ ovan kvadraten $0 \le x, y \le 1$ i xy-planet.

C Arean under kurvan $y = x^2$ ovan kvadraten $0 \le x, y \le 1$ i xy-planet.

Svar: B. ....

iii) Fältlinjerna till vektorfältet $\mathbf{F}(x, y) = -y\mathbf{i} + x\mathbf{j}$ är (0.5p)

A räta linjer genom origo,

B hyperboliska kurvor,

C cirklar,

D paraboliska kurvor.

Svar: C. ....

4. Beräkna ytintegralen $\iint_S z^2 dS$ där S är konen $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, $0 \le z \le 2$. (2.5p)

Lösning: Konen är en funktionsyta på formen $z = g(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ och vi har således

$$dS = \sqrt{1 + g_1^2 + g_2^2}dxdy = \sqrt{2}dxdy.$$

Domänen R för x och y bestäms av $0 \le z \le 2$ vilket ger disken $x^2 + y^2 \le 4$ i xy-planet. Vi får alltså

$$\iint_S z^2 dS = \sqrt{2} \iint_R z^2 dxdy = \sqrt{2} \iint_R (x^2 + y^2) dxdy,$$

eftersom $z^2 = x^2 + y^2$ på ytan. Vi går nu över till polära koordinater och får slutligen

$$\sqrt{2} \iint_R (x^2 + y^2) dxdy = \sqrt{2} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^2 r^3 dr = 8\sqrt{2}\pi.$$

5. (a) Låt $\mathbf{F}(x,y) = (\cos x + e^y)\mathbf{i} + xe^y\mathbf{j}$. Avgör om $\mathbf{F}$ är konservativt och, om så är fallet, bestäm en potential ϕ till $\mathbf{F}$. (2p)

Lösning: Den vanliga metoden ger att en potential ges av $\phi = xe^y + \sin x + C$. Alternativt kan man verifiera att kriteriet för att $\mathbf{F}$ ska vara konservativ är uppfyllt vilket också är tillräckligt eftersom $\mathbf{F}$ är överallt definierad.

(b) Räkna ut arbetet $\mathbf{F}(x,y)$ utför längs kurvan $\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} - \sin t\mathbf{j}$, $\pi \leq t \leq 3\pi/2$. (1p)

Lösning: Kurvan har startpunkt i $P_0 = \mathbf{r}(\pi) = (\pi, 0)$ och ändpunkt i $P_1 = \mathbf{r}(3\pi/2) = (3\pi/2, 1)$. Eftersom fältet är konservativt får vi att det utförda arbetet ges av

$$\int_{\mathcal{C}} \nabla\phi \cdot d\mathbf{r} = \phi(P_1) - \phi(P_0) = \frac{3\pi e}{2} - \pi - 1.$$

6. Låt V vara soliden som begränsas av planet $z = 2-x-y$ samt koordinatplanen $x = 0, y = 0$, och $z = 0$. Beräkna volymsintegralen $\iiint_V y dV$. (2p)

Lösning: Soliden V är tetrahedern med hörn i $(2,0,0), (0,2,0)$ samt $(0,0,2)$. En möjlig "slicing" är att dela upp den i trianglar $T(x)$ där $0 \leq y \leq 2-x$ och $0 \leq z \leq 2-x-y$. Den itererade volymsintegralen blir då

$$\iiint_V y dV = \int_0^2 dx \iint_{T(x)} y dA = \int_0^2 dx \int_0^{2-x} y dy \int_0^{2-x-y} dz = \frac{2}{3}.$$

7. Låt $\mathbf{F}(x,y) = \frac{1}{2}(-y\mathbf{i} + x\mathbf{j})$ och låt $\mathcal{C}$ vara den slutna kurva som parametriseras av $\mathbf{r}(t) = \sin(2t)\mathbf{i} + \sin t\mathbf{j}$, $0 \leq t \leq \pi$. Använd Greens sats för att räkna ut arean till området R som $\mathcal{C}$ omsluter. (3p)

Lösning: Greens sats säger att

$$\iint_R \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) dA = \oint_{\mathcal{C}=\partial R} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}.$$

Om vi har ett vektorfält $\mathbf{F}$ så att

$$\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} = 1$$

får vi alltså enligt Greens formel att

$$\text{area}(R) = \iint_R dA = \oint_{\mathcal{C}=\partial R} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r},$$

och vi kan således beräkna arean med kurvintegralen över $\mathcal{C}$.

För den parametriserade kurvan får vi

$$\begin{aligned}
\oint_{\mathcal{C}=\partial R} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} &= \int_0^\pi \mathbf{F}(\mathbf{r}(t))\cdot \frac{d\mathbf{r}(t)}{dt}dt \\
&= \frac{1}{2}\int_0^\pi (-\sin t, \sin 2t)\cdot(2\cos 2t, \cos t)dt \\
&= \frac{1}{2}\int_0^\pi \big(-2\sin t\ \cos 2t + \sin 2t\ \cos t\big)dt.
\end{aligned}$$

Vi kan nu utnyttja följande trigonometriska identiteter för dubbla vinkeln (se formelbladet):

$$\sin 2t = 2\sin t\ \cos t, \qquad \cos 2t = \cos^2 t - \sin^2 t.$$

Med hjälp av dessa förenklas integralen till

$$\int_0^\pi \sin^3 t dt$$

Vi kan nu använda trigonometriska ettan för att skriva $\sin^2 t = 1 - \cos^2 t$ vilket ger integralen

$$\int_0^\pi (\sin t - \sin t\cos^2 t)dt = \Big[-\cos t + \frac{1}{3}\cos^3 t\Big]_0^\pi = \frac{4}{3}.$$

Arean av regionen R är alltså

$$\text{area}(R) = \frac{4}{3}.$$

8. Låt $\mathbf{F}(x,y,z) = (y^2+z)\mathbf{k}$ och låt S vara den koniska ytan $z = 1-\sqrt{x^2+y^2}$, $z \geq 0$.

(a) Bestäm flödet ut ur S genom att beräkna flödesintegralen $\iint_S \mathbf{F}\cdot\hat{\mathbf{n}}dS$. (3p)

(b) Beräkna nu samma flöde ut ur S genom att använda Gauss sats. (3p)

Lösning: (a) För en kon $z = g(x,y) = 1-\sqrt{x^2+y^2}$ har vi

$$dS = \sqrt{1+g_1^2+g_2^2}dxdy = \sqrt{2}dxdy.$$

Enhetsnormalen ut ur S blir (eftersom S är en funktionsyta)

$$\hat{\mathbf{n}} = \frac{\mathbf{n}}{|\mathbf{n}|} = \frac{1}{\sqrt{2}}(-g_1\mathbf{i} - g_2\mathbf{j} + \mathbf{k}) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\mathbf{i} + \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\mathbf{j} + \mathbf{k}\right).$$

Eftersom

$$\mathbf{F}\cdot\hat{\mathbf{n}} = \frac{1}{\sqrt{2}}(y^2+z)$$

kan vi skriva flödet ut ur S som

$$\iint_S \mathbf{F}\cdot\hat{\mathbf{n}}dS = \iint_D (y^2+z)dA = \iint_D (y^2+1-\sqrt{x^2+y^2})dA,$$

där D är disken $x^2+y^2 \leq 1$ som utgör projektionen av S på xy-planet.

Vi kan nu beräkna de återstående integralerna i polära koordinater

$$\begin{aligned}
\iint_D (y^2 + 1 - \sqrt{x^2+y^2})dA &= \int_0^{2\pi} d\theta \sin^2\theta \int_0^1 r^3 dr + \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 r dr - \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 r^2 dr \\
&= \frac{\pi}{4} + \pi - \frac{2\pi}{3} \\
&= \frac{7\pi}{12}.
\end{aligned}$$

Lösning: (b) För att kunna använda Gauss sats måste vi sluta ytan S. Vi gör detta genom att lägga till botten på konen vilket är en disk $x^2 + y^2 \leq 1$. Beteckna denna disk med S'. Den solida konen V har nu en rand ∂V som utgörs av unionen $S \cup S'$. Totala flödet ut ur ∂V kan nu beräknas med hjälp av Gauss sats

$$\iiint_V \nabla \cdot \mathbf{F} dV = \oiint_{\partial V} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \iint_S \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS + \iint_{S'} \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{n}}' dS.$$

Det sökta flödet ut ur konen S kan alltså beräknas enligt

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS = \iiint_V \nabla \cdot \mathbf{F} dV - \iint_{S'} \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{n}}' dS.$$

Vi börjar med att beräkna flödet ner genom botten S'. Normalen kan väljas till $\hat{\mathbf{n}}' = -\mathbf{k}$. Notera även att på ytan S' har vi $z = 0$. Vi får då

$$\iint_{S'} \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{n}}' dS = -\iint_D y^2 dA = -\frac{\pi}{4},$$

vilket var en precis en av de integraler vi beräknade i (a)-uppgiften.

Det återstår att beräkna volymsintegralen. Vi har

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = 1$$

och således får vi

$$\iiint_V \nabla \cdot \mathbf{F} dV = \iiint_V dV = \mathrm{vol}(V) = \frac{\mathrm{area(basen)} \cdot \mathrm{höjden}}{3} = \frac{\pi}{3}.$$

eftersom V är en solid kon.

Om vi nu samlar våra resultat får vi att flödet ut genom S blir

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS = \frac{\pi}{3} - \left(-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{7\pi}{12},$$

i enlighet med vad vi beräknade i (a)-uppgiften.