Tentamen
TMA044 Flervariabelanalys - Omtentamen E2 (med lösningar)

2019-01-07 kl. 08.30–12.30

Examinator: Daniel Persson, Matematiska vetenskaper, Chalmers

Telefonvakt: Linnea Hietala , telefon: anknytning 5325

Hjälpmedel: endast bifogat formelblad, ej räknedosa

För godkänt på tentan krävs antingen 25 poäng på godkäntdelens två delar sammanlagt, eller att båda delarna är godkända var för sig. För godkänt på del 1 krävs minst 10 poäng, för godkänt på del 2 krävs 13 poäng. Erhållen poäng på någon av delarna får ersätta poäng på motsvarande del på senare tentamen tills kursen ges nästa läsår. För att få slutbetyg på kursen skall också Matlabmomentet vara godkänt. För betyg 4 eller 5 krävs dessutom 33 resp. 42 poäng sammanlagt på tentamens alla delar.

Lösningar läggs ut på kursens webbsida första vardagen efter tentamensdagen. Tentan rättas och bedöms anonymt. Resultat meddelas via Ladok ca. tre veckor efter tentamenstillfället. Första granskningstillfälle meddelas på kurswebbsidan, efter detta sker granskning alla vardagar 9-13, MV:s exp.

Godkäntdelen, del 1

Uppgift 1 och 2 se sidan 4

Godkäntdelen, del 2

Uppgift 3-8 se sidan 5

Överbetygsdelen

Endast om man ligger enstaka poäng från godkänt och presterat riktigt bra på någon av följande uppgifter kan poäng på denna del räknas in för att nå godkäntgränsen. Normalt krävs för poäng på uppgift att man redovisat en fullständig lösningsgång, som i princip lett, eller åtminstone skulle kunnat leda, till målet.

9. (a) Låt $\mathbf{F}(x,y,z) = F_1(x,y,z)\mathbf{i} + F_2(x,y,z)\mathbf{j} + F_3(x,y,z)\mathbf{k}$. Låt S vara en yta i $\mathbb{R}^3$ parametriserad av

$$\mathbf{r}(u,v) = x(u,v)\mathbf{i} + y(u,v)\mathbf{j} + z(u,v)\mathbf{k}.$$

Definiera ett nytt vektorfält $\mathbf{G}(u,v)$ i (u,v)-planet med komponenter:

$$G_1(u,v) := \mathbf{F}(\mathbf{r}(u,v)) \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}, \qquad G_2(u,v) := \mathbf{F}(\mathbf{r}(u,v)) \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}.$$

Visa att följande identitet håller:

$$\operatorname{curl} \mathbf{F} \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \right) = \frac{\partial G_2}{\partial u} - \frac{\partial G_1}{\partial v}.$$

(Denna identitet utgör nyckelsteget i beviset av Stokes sats.) (3p)

Lösning: Se länk: `http://www.math.chalmers.se/Math/Grundutb/CTH/tma044/1718/Stokes_calculation.pdf`

(b) Låt $\mathbf{F}(x,y,z) = (-xy^2, x^2y, z)$ och låt S vara den del av sfären $x^2+y^2+z^2 = 25$ där $z \geq 4$. Beräkna rotationen av $\mathbf{F}$ över S. (3p)

Lösning: Vi vill beräkna ytintegralen

$$\iint_S \operatorname{curl} \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{N}} dS$$

där $\hat{N}$ är enhetsnormalen till S med orientering i positiv z-riktning. Vi kan nu använda Stokes sats för att skriva om denna som en integral runt randen till S. Randen till S är den del av sfären $x^2+y^2+z^2 = 25$ där $z = 4$, dvs cirkeln

$$x^2 + y^2 = 9.$$

Eftersom normalen $\hat{\mathbf{N}}$ är utåtriktad blir randen $\mathcal{C} = \partial S$ moturs orienterad. Vi parametriserar randen med

$$x = 3\cos t, \qquad y = 3\sin t, \qquad z = 4,$$

där $0 \leq t \leq 2\pi$. Enligt Stokes sats får vi

$$\iint_S \operatorname{curl} \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{N}} dS = \oint_{\mathcal{C}=\partial S} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}.$$

Den parametriserade kurvintegralen blir

$$\oint_{\mathcal{C}=\partial S} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_0^{2\pi} \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt} dt = \int_0^{2\pi} (-x(t)y(t)^2, x(t)^2y(t), 4) \cdot (x'(t), y'(t), 0) dt,$$

vilket leder till

$$81 \int_0^{2\pi} \left(\cos t \, \sin^3 t + \cos^3 t \, \sin t\right) dt.$$

Vi kan nu bryta ut en factor $\sin t \, \cos t$ och använda den trigonometriska ettan för att skriva om detta till det enklare uttrycket

$$81 \int_0^{2\pi} \cos t \, \sin t \, dt = 81 \int_0^{2\pi} \frac{\sin 2t}{2} dt = 0.$$

Vi ser alltså att den totala rotationen över ytan är noll.

10. Låt $\mathbf{F} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ vara ett överallt definierat vektorfält.

(a) Låt $\mathcal{C}_1$ och $\mathcal{C}_2$ vara två kurvor som börjar i en punkt P_1 och slutar i en punkt P_2. Använd Greens sats för att beräkna skillnaden $\int_{\mathcal{C}_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} - \int_{\mathcal{C}_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ i termer av dubbelintegraler. (4p)

Lösning (a):

Eftersom kurvan $\mathcal{C}_1 - \mathcal{C}_2$ är en sluten kurva (där notationen betyder att jag först går längs $\mathcal{C}_1$ från början till slut, och sen tillbaka längs $\mathcal{C}_2$, säger Greens sats att detta är en dubbelintegral över det inre R. Mer precist är

$$\int_{\mathcal{C}_1 - \mathcal{C}_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_R \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) dxdy.$$

(b) Använd ovanstående observation och lämpliga identiteter för att bevisa att om $\mathbf{F}$ är konservativt, så är arbetsintegralen oberoende av väg. (2p)

Lösning (b):
Antag att $\mathbf{F} = \nabla\phi$ för någon potential $\phi(x, y)$. Eftersom $\operatorname{curl}\mathbf{F}\cdot\mathbf{k} = \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}$, följer det bland annat från 10c. Detta följer i sin tur från att blandade derivator kommuterar.

11. Beskriv fältlinjerna till vektorfältet $\mathbf{F}(x, y, z) = y\mathbf{i} - x\mathbf{j} + \mathbf{k}$. (6p)

Lösning: Fältlinjesekvationerna blir

$$\frac{dx}{y} = -\frac{dy}{x} = dz.$$

Vi kan skriva om den första ekvationen enligt

$$xdx = -ydy$$

vilket kan integreras till

$$x^2 + y^2 = C^2$$

. Om vi nu kombinerar den första och sista ekvationen får vi

$$\frac{dz}{dx} = \frac{1}{y}.$$

Vi kan nu lösa ut y från vårt första resultat ovan vilket ger x-beroendet:

$$y = \sqrt{C^2 - x^2}$$

Om vi kombinerar de senaste två ekvationerna leds vi till

$$\frac{dz}{dx} = \frac{1}{\sqrt{C^2 - x^2}}$$

Integrering ger då

$$z = \int \frac{dz}{dx}dx = \int \frac{1}{\sqrt{C^2 - x^2}}dx = \arcsin\frac{x}{C} + D.$$

Vi kan även invertera denna relation och skriva

$$x = C\sin(z - D)$$

vilket motsvarar ytor i $\mathbb{R}^3$. Fältlinjerna är därför spiralliknande kurvor där ytorna $x = C\sin(z - D)$ skär cylindrarna $x^2 + y^2 = C^2$.

Formelblad för TMA044

Trigonometri.

$$\cos(x+y) = \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y)$$

$$\sin(x+y) = \sin(x)\cos(y) + \cos(x)\sin(y)$$

$$\cos(x)\cos(y) = \frac{1}{2}(\cos(x-y) + \cos(x+y))$$

$$\sin(x)\sin(y) = \frac{1}{2}(\cos(x-y) - \cos(x+y))$$

$$\sin(x)\cos(y) = \frac{1}{2}(\sin(x-y) + \sin(x+y))$$

$$\tan(x+y) = \frac{\tan(x) + \tan(y)}{1 - \tan(x)\tan(y)}$$

Integralkatalog

$$\int x^a\,dx = \frac{x^{a+1}}{a+1} + C \quad , \quad a \neq -1$$

$$\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + C$$

$$\int \sin x\,dx = -\cos x + C$$

$$\int \cos x\,dx = \sin x + C$$

$$\int \frac{1}{\cos^2 x}\,dx = \tan x + C$$

$$\int \frac{1}{\sin^2 x}\,dx = -\cot x + C$$

$$\int e^x\,dx = e^x + C$$

$$\int a^x\,dx = \frac{a^x}{\ln a} + C \ , \ 0 < a \neq 1$$

$$\int \frac{1}{x^2 + a^2}\,dx = \frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a} + C \ , \ a \neq 0$$

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \ln|f(x)| + C$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{a - x^2}}\,dx = \arcsin\frac{x}{\sqrt{a}} + C \ , \ a > 0$$

$$\int \sqrt{a - x^2}\,dx = \frac{1}{2}x\sqrt{a - x^2} + \frac{a}{2}\arcsin\frac{x}{\sqrt{a}} + C \ , \ a > 0$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2 + a}}\,dx = \ln|x + \sqrt{x^2 + a}| + C \ , \ a \neq 0$$

$$\int \sqrt{x^2 + a}\,dx = \frac{1}{2}(x\sqrt{x^2 + a} + a\ln|x + \sqrt{x^2 + a}|) + C$$

Maclaurinutvecklingar

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$$

$$\sin x = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{x^{2k-1}}{(2k-1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots$$

$$\cos x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots$$

$$(1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} x^k = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \dots \quad , \quad |x| < 1 \quad , \quad \binom{\alpha}{k} = \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-k+1)}{k(k-1)\dots 1}$$

$$\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{x^k}{k} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots \quad , \quad -1 < x \leq 1$$

$$\arctan x = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{x^{2k-1}}{2k-1} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots \quad , \quad |x| \leq 1$$

Övrigt

Masscentrum (x_T, y_T, z_T) för Ω ges av $x_T = \dfrac{\iiint_\Omega x\rho(x,y,z)\,dxdydz}{\iiint_\Omega \rho(x,y,z)\,dxdydz}$, analogt för y_T, z_T.

$\rho(x,y,z)$ är densiteten.

Anonym kod	**TMA044 Flervariabelanalys - Omtentamen E2 (med lösningar) 2019-**

Godkäntdelen: del 1

1. Till nedanstående uppgifter skall svar anges på separat skrivpapper.

(a) i) Mängden av alla punkter i $\mathbb{R}^3$ med avstånd 4 från z-axeln är

A. En sfär med radie 4 och centrum på z-axeln

B. En linje parallell med z-axel på avstånd 4 från origo

C. Ett cylinder med radie 4 centrerad kring z-axeln

D. Planet $z = 4$

(0.5p)

Svar: C

ii) Skärningen mellan graferna till $f(x, y) = x^2+y^2$ och $g(x, y) = 1-x^2-y^2$ beskriver en

A. sfär

B. ellips

C. cylinder

D. cirkel

(0.5p)

Svar: D

iii) **Påstående:** Låt $f(x, y) = 0$ vara en nivåyta, och (a, b) en punkt på nivåytan. Då är $f_x(a, b)(x - a) = y - b$ ekvationen för tangentplanet i (a, b).

Ange vilket alternativ nedan som stämmer. Om du anser att påståendet ovan är fel, ange då den korrekta ekvationen.

A Sant

B Falskt

(0.5p)

Svar: Falskt; ekvationen ges av $\nabla f(a, b) \cdot (x - a, y - b) = 0$.

(b) Låt $f(x, y) = 2x^2y$.

i. Bestäm ekvationen för tangentplanet till funktionsytan $z = f(x, y)$ i punkten $(x, y) = (2, 3)$. (1.5p)

ii. Ange normalen $\mathbf{n}$ till tangentplanet ovan i $(x, y) = (2, 3)$. (1p)

Lösning: Ekvationen för tangentplanet till en funktionsyta $z = f(x, y)$ i punkten $(x, y) = (a, b)$ ges av

$$z = f(a, b) + f_1(a, b)(x - a) + f_2(a, b)(y - b).$$

De partiella derivatorna blir

$$f_1(x,y) = 4xy, \qquad f_2(x,y) = 2x^2$$

och i punkten $(2,3)$ har vi

$$f(2,3) = 24, \qquad f_1(2,3) = 24, \qquad f_2(2,3) = 8.$$

Tangentplanets ekvation blir då

$$z = 24 + 24(x-2) + 8(y-3).$$

Normalen till en funktionsyta $z = f(x,y)$ ges av

$$\mathbf{n}(x,y) = -f_1(x,y)\mathbf{i} - f_2(x,y)\mathbf{j} + \mathbf{k}.$$

I punkten $(2,3)$ har vi alltså normalen

$$\mathbf{n} = \mathbf{n}(2,3) = -24\mathbf{i} - 8\mathbf{j} + \mathbf{k}$$

vilket är den efterfrågade normalen till tangentplanet i punkten $(2,3)$.

(c) Låt $\mathcal{C} \subseteq \mathbb{R}^3$ vara kurvan som utgörs av lösningarna till ekvationen

$$13 - 6x + x^2 + 4y + y^2 = 9$$

i. Ange en parametrisering av kurvan $\mathcal{C}$. (1p)

Lösning: Vi kan skriva om ekvationen enligt:

$$(x-3)^2 + (y+2)^2 = 9$$

vilket vi känner igen som en cirkel med radie 3 och centrum i punkten $(3,-2)$. En parametrisering ges då av

$$x = 3 + 3\cos t, \qquad y = -2 + 3\sin t$$

eller, i termer av positionsvektorn,

$$\mathbf{r}(t) = (3 + 3\cos t)\mathbf{i} + (-2 + 3\sin t)\mathbf{j}.$$

ii. Ställ upp en integral som beräknar längden av grafen till $f(x) = x^3$ mellan origo och $x = 2$. Du behöver *inte* beräkna integralen. (2p)

Lösning: För en parametriserad kurva $\mathbf{r}(t)$ ges kurvlängden i allmänhet av

$$\ell = \int_{t_0}^{t_1} |\mathbf{r}'(t)| dt$$

Vi skall studera grafen $y = f(x) = x^3$ vilket har en naturlig parametrisering:

$$\mathbf{r}(x) = x\mathbf{i} + f(x)\mathbf{j}.$$

Kurvlängden ges alltså av integralen

$$\ell = \int_0^2 |\mathbf{r}'(x)| dx = \int_0^2 \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx = \int_0^2 \sqrt{1 + 9x^4} dx.$$

(d) Låt $f = f(x, y)$ vara en två gånger differentierbar funktion, där $x = u\cos v$ och $y = u$.
Räkna ut $\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}$ och $\frac{\partial^2 f}{\partial v^2}$ i termer av partiella derivator av f. (3p)

Lösning:

$$\frac{\partial f}{\partial u} = \cos v\, f_1 + f_2$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial u^2} = \cos^2 v\, f_{11} + 2\cos v\, f_{12} + f_{22}$$

$$\frac{\partial f}{\partial v} = -u\sin v\, f_1$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial v^2} = -u\cos v\, f_1 + u^2\sin^2 v\, f_{11}.$$

Till följande uppgift skall fullständig lösning redovisas på separat skrivpapper. Motivera och förklara så väl du kan.

2. Låt $f(x,y) = x^2 - 3xy + y^2 - x + 4y$.

(a) Bestäm största och minsta värde av $f(x,y)$ på området $0 \leq x \leq y \leq 1$. (4p)

(b) Bestäm Taylorpolynomet av $f(x,y)$ upp till ordning 2 i punkten $(1,1)$. (1p)

Lösning: (a) Området är en triangel med hörn i $(0,0), (1,1), (1,0)$. Detta är en kompakt mängd och funktionen är kontinuerlig. Därför måste den anta ett största och minsta värde på området. Punkterna som måste kollas är: kritiska punkter inuti triangeln, kritiska punkter på randen, hörnpunkter. Vi kolla först kritiska punkter:

$$\nabla f(x,y) = (2x - 3y - 1, -3x + 2y + 4) = (0,0)$$

Detta ekvationssystem har endast en lösning: $(x,y) = (2,1)$. Denna punkt ligger dock utanför triangeln och skall därför bortses från.

Vi övergår nu till att kontrollera randen. Vi börjar med den horisontella linjen som kan parametriseras med $(x,0)$, $0 \leq x \leq 1$. Vi har då $f(x,0) = 2x - 1$ vilket har en kritiskt punkt i $x = 1/2$. Funktionens värde i denna punkt är

$$f(1/2, 0) = -1/4.$$

Vi går vidare till linjen $x = 1$ där vi finner $f(1,y) = y^2 + y$ vilket har en kritiskt punkt i $y = -1/2$. Punkten $(1, -1/2)$ ligger dock utanför triangeln och måste därför bortses från.

Linjen mellan origo och $(1,1)$ kan parametriseras med $(x,y) = (x,x)$ vilket ger $f(x,x) = -x^2 + 3x$ och vi har en kritiskt punkt i $x = 3/2$. Men det resulterar i punkten $(3/2, 3/2)$ vilken ligger utanför triangeln.

Slutligen kollar vi funktionens värden i hörnpunkterna:

$$f(0,0) = 0, \qquad f(1,0) = 0, \qquad f(1,1) = 2.$$

Vi drar alltså slutsatsen att funktions största värde är 2 vilket antas i $(1,1)$ och det minsta värdet är $-1/4$ vilket antas i $(1/2, 0)$.

Lösning: (b)

$$f(x,y) = 2 - 2(x-1) + 3(y-1) + \frac{1}{2}\left(2(x-1)^2 - 6(x-1)(y-1) + 2(y-1)^2\right).$$

Om vi sätter $h = x - 1$ och $k = y - 1$ kan vi skriva detta mer kompakt som

$$f(h,k) = 2 - 2h + 3k + h^2 - 3hk + k^2.$$

Anonym kod	**TMA044 Flervariabelanalys - Omtentamen E2 (med lösningar) 2019-**

Godkäntdelen: del 2

Till uppgift 3 nedan räcker det med svar (ingen motivering behövs), men för uppgift 4-7 skall fullständiga lösningar redovisas. Motivera och förklara så väl du kan. Alla lösningar anges på separat skrivpapper.

3. i) Låt R utgöra rektangeln som definieras av $-1 \leq x \leq 0$ samt $-1 \leq y \leq 1$. Dubbelintegralen $\iint_R (x^2 - x)dA$ är då:

A positiv,

B negativ,

C noll, (0.5p)

Svar: A

ii) Vilket eller vilka av följande alternativ stämmer? Integralen $\int_0^1 \int_x^1 dydx$ representerar (1p)

A Arean av en triangulär region i xy-planet.

B Volymen under planet $z = 1$ ovanför en triangulär region i xy-planet.

C Arean av en kvadrat i yz-planet.

D Arean av en kvadrat i xz-planet.

Svar: A och B.

iii) Avgör om följande påstående är sant eller falskt. Låt $\mathbf{r}(t)$ vara en flödeslinje till vektorfältet $\mathbf{F}$. Då beskriver $\mathbf{r}(t-5)$ en flödeslinje för samma vektorfält $\mathbf{F}$. (0.5p)

A Sant,

B Falskt,

Svar: A (sant). ....

4. Beräkna dubbelintegralen

$$\iint_R x\, e^{-x^2-y^2} dA$$

där

$$R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, |x| \leq 1,\ |y| \leq 1\}.$$

(2p)

Lösning: Domänen R är en kvadrat med hörn i $(-1,-1), (-1,1), (1,-1), (1,1)$. Vi kan således skriva om den itererade integralen enligt

$$\iint_R x\, e^{-x^2-y^2} dA = \int_{-1}^{1} x\, e^{-x^2} dx \int_{-1}^{1} e^{-y^2} dy.$$

Den andra integralen över y är lurig eftersom e^{-y^2} ej har en trevlig primitiv funktion. Låt oss därför fokusera på den första integralen över x som kan beräknas genom variabelsubstitution:

$$\int_{-1}^{1} x\, e^{-x^2} dx = \{u = x^2, du = 2x\, dx\} = \frac{1}{2}\int_{1}^{1} e^{-u} du = \frac{1}{2}(e^{-1} - e^{-1}) = 0.$$

Vi behöver alltså inte beräkna integralen över y utan drar slutsatsen att totala integralen blir noll:

$$\iint_R x\, e^{-x^2-y^2}\, dA = 0.$$

5. (a) Låt $\mathbf{F}(x,y,z) = e^{y+z}(\cos^2 x - \sin^2 x)\mathbf{i} + \sin x\, \cos x\, e^{y+z}\mathbf{j} + \sin x\, \cos x\, e^{y+z}\mathbf{k}$. Avgör om $\mathbf{F}$ är konservativt och, om så är fallet, bestäm en potential ϕ till $\mathbf{F}$. (2p)

Lösning: Den vanliga metoden ger att en potential ges av $\phi = \sin x\, \cos x\, e^{y+z} + C$. Alternativt kan man verifiera att kriteriet för att $\mathbf{F}$ ska vara konservativ är uppfyllt vilket också är tillräckligt eftersom $\mathbf{F}$ är överallt definierad.

(b) Räkna ut arbetet vektorfältet $\mathbf{F}(x,y,z)$ i (a) utför från $(5,-2,2)$ till $(3,1,2)$ längs kurvan $\mathcal{C}$ som definieras av ekvationerna

$$\frac{(x-3)^2}{4} + \frac{(y+2)^2}{9} = 1, \qquad z = 2$$

(1p)

Lösning: Eftersom $\mathbf{F}$ är konservativt så är arbetet oberoende av vägen, och beror endast på ändpunkterna. Resultatet blir således

$$\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \int_{\mathcal{C}} \nabla\phi \cdot d\mathbf{r} = \phi(3,1,2) - \phi(5,-2,2) = \sin 3\, \cos 3\, e^3 - \sin 5\, \cos 5.$$

6. Beräkna volymen av soliden R som ligger under planet $z = 3 - 2y$ samt ovan paraboloiden $z = x^2 + y^2$. (2p)

Lösning: Ytorna skär varandra då

$$3 - 2y = x^2 + y^2$$

Genom att komplettera en kvadrat kan vi skriva om detta enligt

$$x^2 + (y+1)^2 = 4$$

vilket vi känner igen som en cirkel centrerad kring $x = 0$ och $y = -1$. Vi vill beräkna integralen

$$\text{Vol(R)} = \iiint_R dV$$

Vi kan iterera denna integral genom att först integrera i z-led och sedan över disken $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x^2 + y^2 \leq 4\}$ som utgör projektionen av cylindern på xy-planet:

$$\text{Vol(R)} = \iint_D dA \int_{x^2+y^2}^{3-2y} dz = \iint_D (3 - 2y - x^2 - y^2)dxdy = \iint_D (4 - x^2 - (y+1)^2)dxdy.$$

Vi kan parametrisera disken D med polära koordinater:

$$x = r\cos t, \qquad y = -1 + r\sin t$$

vilket ger

$$\iint_D (4 - x^2 - (y+1)^2)dxdy = \int_0^{2\pi} dt \int_0^2 (4 - r^2)r\,dr = 8\pi.$$

7. Låt $\mathcal{C}$ vara cirkeln $x^2 + y^2 = 4$ med moturs orientering. Beräkna integralen

$$\oint_{\mathcal{C}} (x^3 - x^2y)dx + xy^2dy$$

på följande två olika sätt och verifiera att svaren överensstämmer:

(a) genom att parametrisera kurvan och utföra kurvintegralen med direkt beräkning; (2p)

(b) genom att använda Greens sats. (1p)

Lösning (a): Vi parametriserar kurvan:

$$\mathbf{r}(t) = 2\cos t\,\mathbf{i} + 2\sin t\,\mathbf{j},$$

där $0 \leq t \leq 2\pi$. Vi kan tolka integralen som

$$\oint_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

med vektorfältet

$$\mathbf{F} = (x^3 - x^2y)\mathbf{i} + xy^2\mathbf{j}.$$

Med vår parametrisering får vi då:

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) = 8(\cos^3 t - \cos^2 t\,\sin t)\mathbf{i} + 8\cos t\,\sin^2 t\,\mathbf{j}, \qquad d\mathbf{r}(t) = -2\sin t\,dt\,\mathbf{i} + 2\cos t\,dt\,\mathbf{j}.$$

Insättning i integralen ger

$$\int_0^{2\pi} \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt} dt = \int_0^{2\pi} \left(-16 \sin t \, \cos^3 t + 32 \cos^2 t \, \sin^2 t\right) dt$$

Med hjälp av variabelsubstitutionen $u = \cos t$ kan vi slutat oss till att den första termen ger noll bidrag:

$$\int_0^{2\pi} \sin t \, \cos^3 t \, dt = 0.$$

Den andra termen kan vi skriva om till $(\sin t \, \cos t)^2 = (\frac{1}{2} \sin 2t)^2$, varefter vi utnyttjar identiteten (se formelsamling)

$$\sin x \, \sin y = \frac{1}{2}(\cos(x - y) + \cos(x + y))$$

vilket ger

$$(\tfrac{1}{2} \sin 2t)^2 = \frac{1}{4} \sin 2t \, \sin 2t = \frac{1}{8}(1 + \cos 4t).$$

Insättning i integralen ger då det slutgiltiga svaret:

$$32 \int_0^{2\pi} \cos^2 t \, \sin^2 t dt = \frac{32}{8} \int_0^{2\pi} (1 + \cos 4t) dt = \frac{32}{8} 2\pi = 8\pi.$$

Lösning (b): Med hjälp av Greens sats skriver vi om integralen som en dubbelintegral över det område D som innesluts av $\mathcal{C}$, dvs $\partial D = \mathcal{C}$. Vi får då

$$\oint_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_D \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) dA = \iint_D (x^2 + y^2) dx \, dy$$

Området D är en disk med radie $r = 2$ så vi kan lätt beräkna integralen i polära koordinater

$$\iint_D (x^2 + y^2) dx \, dy = \int_0^{2\pi} dt \int_0^2 r^3 dr = 2\pi \int_0^2 r^3 dr = 2\pi \cdot 4 = 8\pi.$$

8. Låt $\mathbf{F}(x,y,z) = (xz\sin(yz)+x^3)\mathbf{i}+\cos(yz)\mathbf{j}+(3zy^2-e^{x^2+y^2})\mathbf{k}$ och låt R vara soliden som begränsas av xy-planet samt paraboloiden $z = 4-x^2-y^2$. Låt S vara randen till R.

(a) Bestäm flödet $\oiint_S \mathbf{F}\cdot\hat{\mathbf{N}}dS$ ut ur S. (3p)

(b) Låt $S = S_1 \cup S_2$, där S_1 är paraboloiden $z = 4-x^2-y^2$, $z \geq 0$, och S_2 är disken $x^2+y^2 \leq 4$ i xy-planet. Beräkna flödet av $\mathbf{F}$ upp genom S_1. (3p)

Lösning (a): Eftersom S är sluten kan vi använda Gauss sats vilket är betydligt enklare än att beräkna flödesintegralen över S direkt. Enligt Gauss sats har vi

$$\iiint_R \operatorname{div}\mathbf{F}\,dV = \oiint_{\partial R=S} \mathbf{F}\cdot\hat{\mathbf{N}}\,dS.$$

Anledningen till att detta förenklar problemet är att divergensen av $\mathbf{F}$ blir betydligt enklare än $\mathbf{F}$ själv:

$$\operatorname{div}\mathbf{F} = 3(x^2+y^2).$$

Det är naturligt att utföra integralen i z-led först vilket leder till:

$$3\iiint_R (x^2+y^2)\,dV = 3\iint_D \int_0^{4-x^2-y^2} (x^2+y^2)dzdA = 3\iint_D (x^2+y^2)(4-x^2-y^2)dA.$$

Området D utgörs av projektionen av paraboloiden $z = 4-x^2-y^2$ på xy-planet vilket är en disk $x^2+y^2 \leq 4$. I polära koordinater får vi då

$$3\int_0^{2\pi} dt \int_0^2 r^3(4-r^2)dr = 32\pi.$$

Det totala flödet ut genom S är alltså 32π.

Lösning (b): Vi vill nu inte beräkna flödet ut genom hela $S = S_1 \cup S_2$ utan endast genom paraboloiden S_1, dvs integralen

$$\iint_{S_1} \mathbf{F}\cdot\hat{\mathbf{N}}_1\,dS$$

Denna går att beräkna direkt genom att notera att S_1 är en funktionsyta $z = f(x,y)$ och har således normal (orienterad utåt)

$$\mathbf{N}(x,y) = -f_1(x,y)\mathbf{i} - f_2(x,y)\mathbf{j} + \mathbf{k}.$$

Vi kan sedan notera att en naturlig parametrisering ges av

$$\mathbf{r}(x,y) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + f(x,y)\mathbf{k}.$$

Ytelementet fås sedan genom $dS = \sqrt{1+(f_1)^2+(f_2)^2}dx\,dy$. Integralen tar nu formen

$$\iint_{S_1} \mathbf{F}\cdot\hat{\mathbf{N}}_1\,dS = \iint_D \mathbf{F}(\mathbf{r}(x,y))\cdot\mathbf{N}(x,y)\,dx\,dy,$$

där D är projektionen av paraboloiden på xy-planet. Det går utmärkt att beräkna integralen på detta sätt. Problemet är bara att integranden $\mathbf{F}\cdot\mathbf{N}_1$ blir ganska komplicerad på grund av att vektorfältet är komplicerat. Det är därför betydligt enklare att lösa problemet genom att använda Gauss sats. Men eftersom ytan S_1 ej är sluten kan vi inte applicera Gauss direkt. Från (a)-uppgiften har vi:

$$\iiint_R \operatorname{div}\mathbf{F}\,dV = \oiint_S \mathbf{F}\cdot\hat{\mathbf{N}}\,dS = \iint_{S_1} \mathbf{F}\cdot\hat{\mathbf{N}}_1\,dS + \iint_{S_2} \mathbf{F}\cdot\hat{\mathbf{N}}_2\,dS.$$

Om vi kombinerar detta med vårt resultat från (a)-uppgiften får vi

$$\iint_{S_1} \mathbf{F}\cdot\hat{\mathbf{N}}_1\,dS = 32\pi - \iint_{S_2} \mathbf{F}\cdot\hat{\mathbf{N}}_2\,dS.$$

Integralen vi måste beräkna är nu över S_2 vilket är precis disken D vi diskuterade ovan. Vi kan således välja normalen

$$\hat{\mathbf{N}}_2 = -\mathbf{k}.$$

Vi får då

$$\mathbf{F}\cdot\hat{\mathbf{N}}_2 = e^{x^2+y^2}$$

där vi även har utnyttjat att $z = 0$ på D. Integralen som skall beräknas är då

$$\iint_D e^{x^2+y^2}\,dS.$$

I polära koordinater får vi

$$\int_0^{2\pi} dt \int_0^2 e^{r^2} r\,dr = 2\pi\left[\frac{1}{2}e^{r^2}\right]_0^2 = \pi(e^4-1).$$

Flödet ut genom S_1 är således:

$$\iint_{S_1} \mathbf{F}\cdot\hat{\mathbf{N}}_1 dS = 32\pi - \pi(e^4-1) = \pi(33-e^4).$$