Tentamen
TMA044 Flervariabelanalys - Omtentamen E2 (med lösningar)

2019-08-30 kl. 08.30–12.30

Examinator: Daniel Persson, Matematiska vetenskaper, Chalmers

Telefonvakt: Jimmy Aronsson , telefon: anknytning 5325

Hjälpmedel: endast bifogat formelblad, ej räknedosa

För godkänt på tentan krävs antingen 25 poäng på godkäntdelens två delar sammanlagt, eller att båda delarna är godkända var för sig. För godkänt på del 1 krävs minst 10 poäng, för godkänt på del 2 krävs 13 poäng. Erhållen poäng på någon av delarna får ersätta poäng på motsvarande del på senare tentamen tills kursen ges nästa läsår. För att få slutbetyg på kursen skall också Matlabmomentet vara godkänt. För betyg 4 eller 5 krävs dessutom 33 resp. 42 poäng sammanlagt på tentamens alla delar.

Lösningar läggs ut på kursens webbsida första vardagen efter tentamensdagen. Tentan rättas och bedöms anonymt. Resultat meddelas via Ladok ca. tre veckor efter tentamenstillfället. Första granskningstillfälle meddelas på kurswebbsidan, efter detta sker granskning alla vardagar 9-13, MV:s exp.

Godkäntdelen, del 1

Uppgift 1 och 2 se sidan 4

Godkäntdelen, del 2

Uppgift 3-7 se sidan 5

Överbetygsdelen

Endast om man ligger enstaka poäng från godkänt och presterat riktigt bra på någon av följande uppgifter kan poäng på denna del räknas in för att nå godkäntgränsen. Normalt krävs för poäng på uppgift att man redovisat en fullständig lösningsgång, som i princip lett, eller åtminstone skulle kunnat leda, till målet.

8. Låt $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ vara en funktion.

(a) Formulera definitionen av *differentierbarhet* för $f(x, y)$ i en punkt (a, b). (2p)

(b) Visa att om $f(x, y)$ är differentierbar i (a, b) så är $f(x, y)$ kontinuerlig i (a, b). (2p)

(c) Betrakta vektorfältet ∇f som ett vektorfält $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ genom att sätta z-komponenten till noll. Visa att $\nabla \times (\nabla f) = 0$. (2p)

Lösning: Se boken.

9. Bevisa nedanstående:

(a) Greens sats över en rektangel R i $\mathbb{R}^2$; (4p)

(b) Identiteten $\operatorname{div}\operatorname{curl} = 0$. (2p)

Lösning: Se boken.

10. Betrakta vektorfältet $\mathbf{F}(x,y) = \left(\frac{-y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}\right)$, definierat för alla $(x,y) \neq (0,0)$.

(a) Visa att $\nabla \times \mathbf{F} = 0$, men att arbetsintegralen för alla slutna kurvor som går ett varv runt origo är icke-noll. (4p)

(b) Förklara varför $\mathbf{F}$ inte kan vara konservativ. (2p)

Lösning: Det är en enkel beräkning att $\nabla \times \mathbf{F} = 0$ utanför origo. Vi kontrollerar först att den slutna kurvan parametriserad av $\mathbf{r}(t) = (\cos t, \sin t), 0 \leq t \leq 2\pi$ har en arbetsintegral som är icke-noll. Integralen blir i det fallet, $\int_0^{2\pi} \mathbf{F} \cdot \frac{d\mathbf{r}(t)}{dt} dt = \int_0^{2\pi} -\sin t(-\sin t)dt + \cos t + \cos t \cos t dt = \int_0^{2\pi} dt = 2\pi$. Givet en annan kurva γ som går exakt ett varv moturs runt origo, låt D vara området mellan γ och $\mathbf{r}(t)$. Enligt Greens sats är skillnaden mellan arbetsintegralerna längs γ och $\mathbf{r}(t)$ en dubbelintegral över D, med integrand $\nabla \times \mathbf{F} \cdot \mathbf{k} = 0$, alltså ger de samma svar.
Slutligen, $\mathbf{F}$ kan inte vara konservativ eftersom för konservativa vektorfält så är arbetsingraler enbart beroende av punkterna där kurvan börjar och slutar. Om nu vi tar två arbetsintegraler som börjar och slutar i $(1,0)$, t.ex. $\mathbf{r}(t)$ och den konstanta kurvan $\mathbf{l}(t) = (1,0)$, ser vi att i det ena fallet är arbetsintegralen 2π, i det andra fallet 0. Alltså kan $\mathbf{F}$ inte vara konservativ.

Formelblad för TMA044

Trigonometri.

$$\cos(x+y) = \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y)$$

$$\sin(x+y) = \sin(x)\cos(y) + \cos(x)\sin(y)$$

$$\cos(x)\cos(y) = \frac{1}{2}(\cos(x-y) + \cos(x+y))$$

$$\sin(x)\sin(y) = \frac{1}{2}(\cos(x-y) - \cos(x+y))$$

$$\sin(x)\cos(y) = \frac{1}{2}(\sin(x-y) + \sin(x+y))$$

$$\tan(x+y) = \frac{\tan(x) + \tan(y)}{1 - \tan(x)\tan(y)}$$

Integralkatalog

$$\int x^a\,dx = \frac{x^{a+1}}{a+1} + C \quad , \quad a \neq -1$$

$$\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + C$$

$$\int \sin x\,dx = -\cos x + C$$

$$\int \cos x\,dx = \sin x + C$$

$$\int \frac{1}{\cos^2 x}\,dx = \tan x + C$$

$$\int \frac{1}{\sin^2 x}\,dx = -\cot x + C$$

$$\int e^x\,dx = e^x + C$$

$$\int a^x\,dx = \frac{a^x}{\ln a} + C \;\; , \;\; 0 < a \neq 1$$

$$\int \frac{1}{x^2+a^2}\,dx = \frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a} + C \;\; , \;\; a \neq 0$$

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \ln|f(x)| + C$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{a-x^2}}\,dx = \arcsin\frac{x}{\sqrt{a}} + C \;\; , \;\; a > 0$$

$$\int \sqrt{a-x^2}\,dx = \frac{1}{2}x\sqrt{a-x^2} + \frac{a}{2}\arcsin\frac{x}{\sqrt{a}} + C \;\; , \;\; a > 0$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+a}}\,dx = \ln|x + \sqrt{x^2+a}| + C \;\; , \;\; a \neq 0$$

$$\int \sqrt{x^2+a}\,dx = \frac{1}{2}(x\sqrt{x^2+a} + a\ln|x + \sqrt{x^2+a}|) + C$$

Maclaurinutvecklingar

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{k!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots$$

$$\sin x = \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}\frac{x^{2k-1}}{(2k-1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots$$

$$\cos x = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{x^{2k}}{(2k)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots$$

$$(1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^{\infty}\begin{pmatrix}\alpha\\ k\end{pmatrix}x^k = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \ldots \quad , \quad |x| < 1 \quad , \quad \begin{pmatrix}\alpha\\ k\end{pmatrix} = \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-k+1)}{k(k-1)\ldots 1}$$

$$\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{x^k}{k} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots \quad , \quad -1 < x \leq 1$$

$$\arctan x = \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}\frac{x^{2k-1}}{2k-1} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \ldots \quad , \quad |x| \leq 1$$

Övrigt

Masscentrum (x_T, y_T, z_T) för Ω ges av $x_T = \dfrac{\iiint_\Omega x\rho(x,y,z)\,dxdydz}{\iiint_\Omega \rho(x,y,z)\,dxdydz}$, analogt för y_T, z_T.

$\rho(x,y,z)$ är densiteten.

Anonym kod	**TMA044 Flervariabelanalys - Omtentamen E2 (med lösningar) 2019-**

Godkäntdelen: del 1

1. Till nedanstående uppgifter skall svar anges på separat skrivpapper.

(a) i) Mängden av alla punkter i $\mathbb{R}^3$ med avstånd 1 från punkten $(0, 0, 1)$ är

A. En sfär med radie 1 och centrum i punkten $z = 1$ på z-axeln
B. En cylinder parallell med x-axeln
C. Ett klot med radie 1 och centrum i punkten $z = 1$ på z-axeln
D. Planet $z = 1$

(0.5p)

Svar: A

ii) Skärningen mellan graferna till $f(x, y) = 1$ och $g(x, y) = 1 - x^2 - y^2$ beskriver en/ett

A. sfär
B. ellips
C. punkt
D. cirkel
E. plan

(0.5p)

Svar: C

iii) **Påstående:** Låt $f(x, y) = 0$ vara en nivåyta, och (a, b) en punkt på nivåytan. Då är $\nabla f(a, b) \cdot (x - a, y - b) = 0$. ekvationen för tangentplanet i (a, b).

Ange vilket alternativ nedan som stämmer. Om du anser att påståendet ovan är fel, ange då den korrekta ekvationen.

A Sant
B Falskt

(0.5p)

Svar: Sant

(b) Låt $f(x, y) = 2x^3y^2 + y^2$.

i. Bestäm ekvationen för tangentplanet till funktionsytan $z = f(x, y)$ i punkten $(x, y) = (1, 1)$. (1.5p)

ii. Ange normalen $\mathbf{n}$ till tangentplanet ovan i $(x, y) = (1, 1)$. (1p)

Lösning: Ekvationen för tangentplanet till en funktionsyta $z = f(x, y)$ i punkten (a, b) ges av

$$z = f(a, b) + f_1(a, b)(x - a) + f_2(a, b)(y - b).$$

De partiella derivatorna blir

$$f_1(x,y) = 6x^2y^2, \qquad f_2(x,y) = 4x^3y + 2y$$

och i punkten $(1,1)$ har vi

$$f(1,1) = 3, \qquad f_1(1,1) = 6, \qquad f_2(1,1) = 6.$$

Tangentplanets ekvation blir då

$$z = 3 + 6(x-1) + 6(y-1).$$

Normalen till en funktionsyta $z = f(x,y)$ ges av

$$\mathbf{n}(x,y) = -f_1(x,y)\mathbf{i} - f_2(x,y)\mathbf{j} + \mathbf{k}.$$

I punkten $(1,1)$ har vi alltså normalen

$$\mathbf{n} = \mathbf{n}(1,1) = -6\mathbf{i} - 6\mathbf{j} + \mathbf{k}$$

vilket är den efterfrågade normalen till tangentplanet i punkten $(1,1)$.

(c) Låt $\mathcal{C} \subseteq \mathbb{R}^3$ vara kurvan som utgörs av skärningen mellan graferna till $f(x,y) = x^2+y^2$ och $g(x,y) = 4 - x^2 - y^2$.

i. Ange en parametrisering av kurvan $\mathcal{C}$. (1p)

Lösning: Graferna skär varandra då

$$x^2 + y^2 = 2$$

vilket vi känner igen som en cirkel med radie $\sqrt{2}$ i planet $z = 2$ och centrum i punkten $(0,0,2)$. En parametrisering ges då av

$$x(t) = \sqrt{2}\cos t, \qquad y(t) = \sqrt{2}\sin t, \qquad z = 2, \quad 0 \le t \le 2\pi,$$

eller, i termer av positionsvektorn,

$$\mathbf{r}(t) = \sqrt{2}\cos t\mathbf{i} + \sqrt{2}\sin t\mathbf{j} + 2\mathbf{k}.$$

ii. Ställ upp en integral som beräknar längden av en parametriserad kurva. Använd sedan denna för att beräkna längden av kurvan $\mathcal{C}$. (2p)

Lösning: För en parametriserad kurva $\mathbf{r}(t)$ ges kurvlängden i allmänhet av

$$\ell = \int_{t_0}^{t_1} |\mathbf{r}'(t)| dt$$

Vi skall studera kurvan $\mathcal{C}$ med parametrisering:

$$\mathbf{r}(t) = \sqrt{2}\cos t\mathbf{i} + \sqrt{2}\sin t\mathbf{j} + 2\mathbf{k}.$$

Kurvlängden ges alltså av integralen

$$\ell = \int_0^{2\pi} |\mathbf{r}'(x)| dx = \int_0^{2\pi} \sqrt{2\sin^2 t + 2\cos^2 t + 4\cdot 0} dt = \sqrt{2}\int_0^{2\pi} dt = 2\sqrt{2}\pi.$$

(d) Låt $f = f(x, y)$ vara en två gånger differentierbar funktion, där $x = uv + e^u$ och $y = \log u$. Räkna ut $\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}$ och $\frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v}$ i termer av partiella derivator av f. (3p)

Lösning:

$$\frac{\partial f}{\partial u} = (e^u + v) f_1 + \frac{1}{u} f_2$$

$$\frac{\partial f}{\partial v} = u f_1$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial u^2} = e^u\, f_1 - \frac{1}{u^2} f_2 + (e^u + v)^2\, f_{11} + \frac{2}{u}(v + e^u) f_{12} + \frac{1}{u^2} f_{22}.$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} = f_1 + u(e^u + v) f_{11} + f_{12}.$$

Till följande uppgift skall fullständig lösning redovisas på separat skrivpapper. Motivera och förklara så väl du kan.

2. Låt $f(x,y) = 2x^3 - 6xy + 3y^2$.

(a) Bestäm och klassificera kritiska punkter till $f(x,y)$. (3p)

(b) Bestäm Taylorpolynomet av $f(x,y)$ upp till ordning 2 i punkten $(1,1)$. (1p)

(c) Bestäm riktningsderivatan av $f(x,y)$ i punkten $(1,0)$ i riktning $\mathbf{i} + 2\mathbf{j}$. (1p)

Lösning: (a) För att bestämma kritiska punkter beräknar vi de partiella derivatorna

$$f_1 = 6x^2 - 6y, \qquad f_2 = -6x + 6y$$

Kritiska punkter ges alltså av lösningar till ekvationssystemet

$$6x^2 - 6y = 0, \qquad -6x + 6y = 0,$$

vilket motsvarar

$$x^2 = y, \qquad x = y.$$

Detta innebär att

$$x^2 = x$$

och således måste vi ha $x = 0$ eller $x = 1$. Kritiska punkter är således

$$(0,0), (1,1).$$

För att klassificera dem kollar vi Hessianen:

$$H(x,y) = \begin{pmatrix} 12x & -6 \\ -6 & 6 \end{pmatrix}.$$

Vi får determinanterna

$$\det H(0,0) = -6, \qquad \det H(1,1) = 36.$$

Eftersom determinanten är negativ för $(0,0)$ men första matriselementet är noll måste $H(0,0)$ vara indefinit. Det innebär att $(0,0)$ är en *sadelpunkt*. För punkten $(1,1)$ är determinanten positiv och det första matriselementet är positivt. Således är matrisen positivt definit och $(1,1)$ är en *lokal minpunkt*.

Lösning: (b) Taylorutvecklingen av $f(x,y)$ kring punkten $(a,b) = (1,1)$ ges av

$$f(x,y) = f(1,1) - f_1(1,1)(x-1) + f_2(1,1)(y-1) + \frac{1}{2}\left(f_{11}(1,1)(x-1)^2 + 2f_{12}(1,1)(x-1)(y-1) + f_{22}(1,1)(y-1)^2\right).$$

Om vi sätter $h = x - 1$ och $k = y - 1$ och sätter in funktionernas värden i $(1,1)$ kan vi skriva detta mer kompakt som

$$f(h,k) = -1 + 6h^2 - 6hk + 3k^2.$$

Lösning: (c) Riktningsderivatan i riktning $\mathbf{u}$ i punkten (a,b) ges av

$$D_{\mathbf{u}}f(a,b) = \mathbf{u} \cdot \nabla f(a,b).$$

Notera att $\mathbf{u}$ här måste vara en enhetsvektor. Vi vill beräkna riktningsderivatan i riktning $\mathbf{i} + 2\mathbf{j}$. Normen är $|\mathbf{i} + 2\mathbf{j}| = \sqrt{5}$ och således är vår enhetsvektor

$$\mathbf{u} = \frac{\mathbf{i} + 2\mathbf{j}}{\sqrt{5}}.$$

Riktningsderivatan i punkten $(1,0)$ blir då

$$\mathbf{u} \cdot \nabla f(1,0) = \frac{\mathbf{i} + 2\mathbf{j}}{\sqrt{5}} \cdot (6\mathbf{i} - 6\mathbf{j}) = -\frac{6}{\sqrt{5}}.$$

Anonym kod	**TMA044 Flervariabelanalys - Omtentamen E2 (med lösningar) 2019-**

Godkändtdelen: del 2

Till uppgift 3 nedan räcker det med svar (ingen motivering behövs), men för uppgift 4-7 skall fullständiga lösningar redovisas. Motivera och förklara så väl du kan. Alla lösningar anges på separat skrivpapper.

3. i) Ange om följande är sant eller falskt.
Påstående: *Om* $\mathbf{F} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ *är ett vektorfält så är vektorn* $\mathbf{F}(x,y)$ *vinkelrät mot fältlinjen som skär punkten* (x,y). (0.5p)

Svar: Falskt

ii) Ange om följande är sant eller falskt.
Påstående: *Om* f *är en kontinuerlig funktion på ett begränsat område* D *så är* f *integrerbar på* D. (0.5p)

Svar: Falskt (om området inte är slutet kan integralen bli för stor).

iii) Vilken av följande integraler är lika med integralen $\int_0^3 \int_0^{4x} f(x,y)dydx$? (1p)

A $\int_0^{4x} \int_0^3 f(x,y)dxdy$
B $\int_0^{12} \int_{y/4}^3 f(x,y)dxdy$
C $\int_0^{12} \int_3^{y/4} f(x,y)dxdy$
D $\int_0^{12} \int_0^{y/4} f(x,y)dxdy$
E $\int_0^3 \int_0^{4x} f(x,y)dxdy$

Svar: B.

4. Låt $\mathcal{C}$ vara kurvan beskriven av $\mathbf{r}(t) = (\cos t, \sin t), -\pi/2 \leq t \leq \pi/2$. Räkna ut linjeintegralen $\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$, där $\mathbf{F}(x,y) = (x^2, -1)$ genom

(a) att parametrisera $\mathcal{C}$ och direkt räkna ut integralen. (1p)
(b) att utnyttja att $\mathbf{F}$ är konservativt. (1p)

Lösning:(a) Randen är redan parametriserad, med $x = \cos t, y = \sin t$, så $dx = -\sin t dt, dy = \cos t dt$. Vår arbetsintegral blir alltså

$$\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = -\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin t \cos^2 t dt - \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos t dt = 0 - 2 = -2.$$

Lösning: **(b)** Vektorfältet är konservativt och kan skrivas som $\mathbf{F} = \nabla\phi$ där potentialen ges av $\phi(x,y) = \frac{1}{3}x^3 - y$. Vi har då

$$\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{\mathcal{C}} \nabla\phi \cdot d\mathbf{r} = \phi(\mathbf{r}_1) - \phi(\mathbf{r}_0),$$

där $\mathbf{r}_0$ och $\mathbf{r}_1$ representerar kurvans start och slutpunkter. Vi har $-\pi/2 \leq t \leq \pi/2$ och således

$$\mathbf{r}_0 = 0 \cdot \mathbf{i} - \mathbf{j}, \qquad \mathbf{r}_1 = 0 \cdot \mathbf{i} + \mathbf{j}.$$

Detta ger

$$\phi(\mathbf{r}_1) - \phi(\mathbf{r}_0) = -2 - 2 = -2,$$

i enlighet med svaret i (a).

5. Låt $\mathbf{F}$ vara vektorfältet

$$\mathbf{F}(x,y,z) = \frac{2x}{z}\mathbf{i} + \frac{2y}{z}\mathbf{j} - \frac{x^2+y^2}{z^2}\mathbf{k}.$$

(a) Visa att $\mathbf{F}$ är konservativt och bestäm dess potential. (2p)

(b) Beskriv ekvipotentialytorna. (1p)

(c) Hitta fältlinjerna för $\mathbf{F}$. (2p)

Lösning: (a) $\mathbf{F}$ är konservativt i $\mathbb{R}^3$ förutom längs planet $z = 0$ där det ej är definierat. En potential ges av

$$\phi(x,y,z) = \frac{x^2+y^2}{z}$$

(b) Ekvipotentialytorna ges av ekvationen

$$\frac{x^2+y^2}{z} = C$$

vilka är cirkulära paraboloider parametriserade av C.

(a) Fältlinjesekvationen ges av

$$\frac{dx}{(2x/z)} = \frac{dy}{(2y/z)} = \frac{dz}{(-(x^2+y^2)/z^2)}.$$

Från den första likheten ser vi att

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y}$$

vilket betyder att $y = Ax$ för någon godtycklig konstant A. Vi får då

$$\frac{dx}{2x} = \frac{zdz}{-(x^2+y^2)} = \frac{zdz}{-x^2(1+A^2)}.$$

Detta leder till

$$-(1+A^2)xdx = 2zdz$$

vilken kan integreras till

$$\frac{1}{2}(1+A^2)x^2 + z^2 = \frac{B}{2}.$$

Om vi skriver om denna ekvation som

$$x^2 + y^2 + 2z^2 = B$$

ser vi att dessa är ellipsoider. Fältlinjerna är därför ellipser som utgör skärningen mellan ellipsoiderna och planen $y = Ax$.

6. Använd Greens formel för att visa att ellipsen

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$$

har area πab. (3p)

Lösning. Greens formel säger allmänt att

$$\iint_D \nabla \times \mathbf{F} \cdot \mathbf{k} \, dA = \oint_{\partial D = \mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

Arean av en domän D ges i sin tur av

$$area(D) = \iint_D dA$$

och för att kunna tillämpa Greens formel söker vi alltså ett vektorfält $\mathbf{F}(x, y)$ så att

$$\nabla \times \mathbf{F} \cdot \mathbf{k} = 1.$$

Ett möjligt val är

$$\mathbf{F}(x, y) = \frac{1}{2}(-y\mathbf{i} + x\mathbf{j}).$$

Med detta val ger Greens formel att arean kan uttryckas som linjeintegralen över kurvan $\mathcal{C}$ som omsluter D:

$$area(D) = \frac{1}{2} \int_{\mathcal{C}} (-y, x) \cdot (dx, dy) = \frac{1}{2} \int_{\mathcal{C}} (xdy - ydx).$$

För att beräkna denna måste vi parametrisera $\mathcal{C}$. I vårt exempel är $\mathcal{C}$ given av ellipsen och kan parametriseras enligt:

$$x = h + a\cos\theta, \qquad y = k + b\sin\theta, \qquad 0 \le \theta \le 2\pi.$$

Med denna parametrisering kan vi skriva linjeintegralen som

$$\frac{1}{2} \int_{\mathcal{C}} (xdy - ydx) = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \Big[(h + a\cos\theta)(b\cos\theta) - (k + b\sin\theta)(-a\sin\theta) \Big] d\theta$$

Genom att använda trigonometriska ettan $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$ kan vi förenkla detta till integralen

$$\frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (hb\cos\theta + ak\sin\theta + ab)\, d\theta = \frac{1}{2} \Big[hb\sin\theta - ak\cos\theta + ab\theta \Big]_0^{2\pi}.$$

Vi får då slutligen

$$area(D) = \frac{1}{2}\left(hb\sin 2\pi - ak\cos 2\pi + ab2\pi - hb\sin 0 + ak\cos 0\right) = \pi ab,$$

där vi använt att $\sin 2\pi = \sin 0 = 0$ och $\cos 2\pi = \cos 0 = 1$.

7. Låt S vara den del av sfären $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ som ligger *utanför* cylindern C, given av $x^2 + y^2 = 1$, och låt $\mathbf{F}(x, y, z) = y\mathbf{i} - x\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ vara ett vektorfält.

(a) Beräkna flödet ut genom S av vektorfältet $\mathbf{F}(x, y, z)$.
Tips: Enhetsnormalen ges av $\hat{\mathbf{N}} = \frac{1}{2}(x, y, z)$ och det är rekommenderat att använda sfäriska koordinater; gränserna för φ blir: $\pi/6 \leq \varphi \leq 5\pi/6$. Notera att $\cos 5\pi/6 = -\sqrt{3}/2$ och $\cos \pi/6 = \sqrt{3}/2$. (2p)

(b) Visa att flödet av $\mathbf{F}(x, y, z)$ genom mantelytan av cylindern $x^2 + y^2 = 1$ är noll. (2p)

(c) Använd Gauss sats för $\mathbf{F}(x, y, z)$ för att beräkna volymen av regionen som ligger mellan S och cylindern $x^2 + y^2 = 1$. (2p)

Lösning:

(a) Vi skall beräkna flödet genom ytan S, vilket ges av flödesintegralen

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{N}} dS.$$

Enhetsnormalen är given: $\hat{\mathbf{N}} = \frac{1}{2}(x, y, z)$. Den uppfyller mycket riktigt $|\hat{\mathbf{N}}| = 1$ eftersom på sfären har vi $x^2 + y^2 + z^2 = 4$. Vi använder sfäriska koordinater

$$x(\rho, \theta, \varphi) = \rho \sin\varphi \cos\theta, \quad y(\rho, \theta, \varphi) = \rho \sin\varphi \sin\theta, \quad z(\rho, \theta, \varphi) = \rho \cos\varphi.$$

Radien på sfären är $R = 2$ så vi kan därför sätta $\rho = R = 2$ i dessa formler. Flödesintegralen kommer således bli en integral över θ och φ. Gränserna för θ är de vanliga, $0 \leq \theta \leq 2\pi$, eftersom vi måste få med ytan runt hela sfären. Gränserna för φ var givna i uppgiften till $\pi/6 \leq \varphi \leq 5\pi/6$. Detta motsvarar vinkeln mellan där cylinderns topp skär sfären till där cylinderns botten skär sfären. Ytelementet för en sfär med radie R ges av

$$dS = R^2 \sin\varphi \, d\theta \, d\varphi.$$

Om man inte kommer ihåg detta kan det lätt härledas från den allmänna formeln för ytelementet:

$$dS = \left| \frac{\partial \mathbf{r}(u, v)}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}(u, v)}{\partial v} \right| du \, dv,$$

där $\mathbf{r}(u, v)$ parametriserar ytan. En sfär med fixerad radie $\rho = R$ parametriseras med $(u, v) = (\theta, \varphi)$ vilket ger

$$\mathbf{r}(\theta, \varphi) = x(R, \theta, \varphi)\mathbf{i} + y(R, \theta, \varphi)\mathbf{j} + z(R, \theta, \varphi)\mathbf{k}.$$

Detta ger att ytelementet dS på en sfär blir:

$$dS = \left| \frac{\partial \mathbf{r}(\theta, \varphi)}{\partial \theta} \times \frac{\partial \mathbf{r}(\theta, \varphi)}{\partial \varphi} \right| d\theta \, d\varphi = R^2 \sin\varphi d\theta d\varphi.$$

Vi har nu alla ingredienser för att beräkna flödesintegralen:

$$\iint_S \mathbb{F} \cdot \hat{\mathbf{N}} dS = \frac{1}{2} \iint_S (y, -x, z) \cdot (x, y, z) dS = \frac{1}{2} \iint_S z^2 dS.$$

På sfären har vi $z = 2\cos\varphi$ vilket ger

$$\frac{1}{2}\int_0^{2\pi} d\theta \int_{\pi/6}^{5\pi/6} 2^2 \cdot \cos^2\varphi \, \sin\varphi \cdot 2^2 \cdot d\varphi = 8 \cdot 2\pi \int_{\pi/6}^{5\pi/6} \cos^2\varphi \, \sin\varphi d\varphi.$$

Den primitiva funktionen till $\cos^2\varphi \sin\varphi$ är $-\frac{1}{3}\cos^3\varphi$ (man inser detta tex genom att byta variabler till $u = \cos\varphi$, $du = -\sin\varphi \, d\varphi$). Resultatet blir:

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{N}} dS = 16 \cdot \pi \Big[-\frac{\cos^3\varphi}{3} \Big]_{\pi/6}^{5\pi/6} = -\frac{16}{3}\pi \Big(\cos^3 5\pi/6 - \cos^3 \pi/6 \Big) = 4\sqrt{3}\pi.$$

Svar på (a): Flödet ut genom S av $\mathbf{F}(x, y)$ är $4\sqrt{3}\pi$.

(b) För att beräkna flödet ut genom mantelytan på cylindern C behöver vi dess normal. En enhetsnormal ges av:

$$\hat{\mathbf{N}}_C = \pm(x, y, 0).$$

Man kan ganska lätt gissa sig fram till normalen ovan. Annars kan man notera att cylindern är en nivåyta som kan beskrivas med $f(x, y, z) = x^2 + y^2 - 1 = 0$. Således kan vi få en normalvektor genom att ta gradienten av f:

$$\mathbf{N}_C = \nabla f = (2x, 2y, 0).$$

Enhetsnormalen blir då

$$\hat{\mathbf{N}}_C = \pm\frac{\mathbf{N}_C}{|\mathbf{N}_C|} = \pm(x, y, 0).$$

Eftersom

$$\mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{N}}_C = \pm(y, -x, z) \cdot (x, y, 0) = \pm(xy - xy + 0) = 0$$

så ger detta att flödet genom cylindern alltid är noll:

$$\iint_C \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{N}}_C dS = 0.$$

(c) Låt oss kalla regionen mellan ytan S och cylindern C för D. Eftersom $\nabla \cdot \mathbf{F} = 1$ kan vi använda Gauss sats för att beräkna volymen:

$$vol(D) = \iiint_D dV = \iiint_D \nabla \cdot \mathbf{F} dV = \oiint_{\partial D} \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{N}} dS$$

Randen ∂D till D är unionen

$$\partial D = S \cup C$$

och således kan flödesintegralen i högerledet skrivas som

$$\oiint_{\partial D} \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{N}} dS = \iint_S \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{N}} dS + \iint_C \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{N}} dS.$$

Men de två integralerna i högerledet är precis de flöden vi redan räknat ut i (a) och (b). Således får vi för volymen av D:

$$vol(D) = \underbrace{\iint_S \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{N}} dS}_{=4\sqrt{3}\pi} + \underbrace{\iint_C \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{N}} dS}_{=0} = 4\sqrt{3}\pi.$$

Svar på (c): Volymen av regionen D mellan cylindern C och ytan S är $4\sqrt{3}\pi$.