Motivera alla svar. Spara lösningarna (med mina kommentarer) när ni får tillbaka dem. Detta gäller alla inlämningsuppgifter och det är mycket viktigt

Uppvärmning

(i) Visa att i en Boolesk algebra gäller $x \cdot x = x$, $x \cdot \hat{0} = \hat{0}$, och $\overline{\hat{0}} = \hat{1}$. Du får endast använda Definition 24 på stencilen om relationer!

(ii) Varje element i en Boolesk algebra kan skrivas på ett unikt sätt som summan av atomer. Varför är detta så uppenbart för den Booleska algebran av alla delmängder till en mängd?

(iii) Låt B_n vara den Booleska algebran av alla binära strängar av längd n. Definiera $\phi : B_3 \longrightarrow B_2$ genom $\phi(x_1x_2x_3) = x_1x_2$. Är detta en Boolesk homomorfi?

(iv) Om vi istället sätter $\phi(x_1x_2x_3) = x_1y$, där $y = x_2 \cdot x_3$, är ϕ då en Boolesk homomorfi?

(v) Hur många isomorfier finns det från den Booleska algebran B_n till sig själv?

Att lämna in fredag den 22 september

1. Låt B_n vara den Booleska algebran av alla binära strängar av längd n där operationerna är bitvis multiplikation resp. bitvis Boolesk addition. Avgör om $\phi : B_3 \longrightarrow B_1$ är en Boolesk homomorfi:

$$\phi(x_1x_2x_3) = \begin{cases} 1, & \text{om } x_1 + x_2 + x_3 \text{ udda} \\ 0 & \text{annars} \end{cases}$$

Obs: $x_1x_2x_3$ är en trebitars *sträng*, $x_1 + x_2 + x_3$ är vanlig addition

2. Låt B_n vara som i föregående övning och låt S_{30} vara delbarhetsgittret för 30. Definiera $\phi : S_{30} \longrightarrow B_2$ genom $\phi(n) = xy$ där $x = 1$ om n är jämnt och $x = 0$ annars, och y är det största heltalet k så att 5^k delar n. Är ϕ en Boolesk homomorfi? Ni får använda övning 9 på baksidan.

Tänk på sista inlämningsuppgiften förra gången

3. Låt B vara matrisen för relationen ”barn till,” och låt A vara matrisen för relationen ”yngre än” (båda definerade på samma mängd). Ge en enkel formel (med bara matriser) för matrisen vars (i, j)-element är antalet barn till i som är yngre än j.

4. Låt G vara ett gitter och antag att x är ett element i G som har två olika komplement. Visa att G inte är distributivt.

   Ledning: Här finns åtminstone två möjligheter.

   (a) Dela upp i två fall; där de två komplementen är jämförbara resp. icke jämförbara.

   (b) Visa det *kontrapositiva* påståendet, d.v.s. om G är distributivt och x har två komplement y och z då är $y = z$.

Bonusproblem (inget samarbete)

5. *Möbiusfunktionen* $\mu : G \times G \to \mathbb{Z}$, för ett ändligt gitter G kan definieras så här:

$$\mu(x,x) = 1 \text{ för alla } x \in G \quad \text{och} \quad \mu(x,y) = -\sum_{x \le z < y} \mu(x,z)$$

$\mu(x,y) = 0$ om $x \not\le y$

Visa att i en delmängdsalgebra är $\mu(\emptyset, S) = (-1)^{|S|}$, där $|S|$ är antalet element i S.

6. Låt a, b och n vara positiva heltal. Definiera relationen $\mathcal{R}$ på mängden av alla heltal genom att sätta

$$x\mathcal{R}y \iff ax + by \equiv 0 \pmod{n}.$$

För vilka par (a,b) är $\mathcal{R}$ en ekvivalensrelation? För vilka par (a,b) är $\mathcal{R}$ lika med kongruens mod n?

Ytterligare övningar

1. I boken *Grundläggande digital- och datorteknik* finns, i avsnittet Boolesk algebra, nio såkallade "satser" för Boolesk algebra. Några av dessa ingår i vår alternativa definition av Boolesk algebra. Visa de andra utgående enbart från vår definition.

2. I Definition 24 på stencilen om relationer sägs det (implicit) att i en Boolesk algebra har varje element ett komplement. Visa att det finns endast ett komplement till varje element. Med andra ord, om y uppfyller villkoren för $\bar{x}$, då är $y = \bar{x}$. Du får endast använda Definition 24!

3. Visa De Morgans lagar för Booleska algebror: $\overline{(x+y)} = \overline{x} \cdot \overline{y}$ och $\overline{(x \cdot y)} = \overline{x} + \overline{y}$. Du får endast använda Definition 24 på stencilen om relationer (och föregående uppgift).

4. Visa att i en Boolesk algebra gäller $x + x = x$, $x + \hat{1} = \hat{1}$, och $\overline{\hat{0}} = \hat{1}$. Du får endast använda Definition 24 på stencilen om relationer!

5. Låt $S_n = \{k \in \mathbb{N} \mid k \text{ delar } n\}$. Detta är ett gitter med avseende på relationen $aDb \iff a$ delar b. För vilka n är S_n en Boolesk algebra?

6. Låt M_R vara relationsmatrisen för en relation R. Kan man säga något allmänt om M_R:s inverterbarhet när R är en ekvivalensrelation respektive partiell ordning? Ledning: Varje partiell ordning är en delmängd till en total ordning.

7. Hur många element av rang k finns det i delbarhetsgittret för S_{510510}? För definitionen av rang, se stencilen om relationer

   Ledning: Hitta en isomorfi från S_{510510} till en lämplig Boolesk algebra.

8. Låt G vara ett gitter och B en Boolesk algebra. Antag att det finns en funktion $\phi : B \longrightarrow G$, som bevarar $\hat{0}$, $\hat{1}$ och komplement, det vill säga $\phi(\hat{0}_B) = \hat{0}_G$, $\phi(\hat{1}_B) = \hat{1}_G$, och $\phi(\bar{x})$ är ett komplement (i G) till $\phi(x)$ för alla $x \in B$. Visa att G är en Boolesk algebra.

9. Utgående från definitionen av Boolesk homomorfi (Definition 26) och Definition 24, visa att ϕ är en Boolesk homomorfi om ϕ bevarar $+$ och $^{-}$, det vill säga om $\phi(x+y) = \phi(x) + \phi(y)$ och $\phi(\overline{x}) = \overline{\phi(x)}$.

10. Låt P pomängden av alla naturliga tal som är lika med 1 eller delbara med 3 eller 5 eller 7 och där relationen är delbarhet. Låt Q vara pomängden $\mathbb{N}^3$ med relationen

$$(x_1, x_2, x_3) \le (y_1, y_2, y_3) \iff x_i \le y_i \quad \text{för } i = 1, 2, 3.$$

Visa att P och Q är isomorfa.

11. Låt M vara mängden av alla satslogiska utsagor. Definiera relationen $\sim$ på M genom

$$A \sim B \text{ om och endast om } B \iff A,$$

d.v.s $A \sim B$ betyder att A och B är ekvivalenta utsagor. M.a.o är A sann om och endast om B är sann.

Exempel: $\neg(P \vee Q) \iff (\neg P \wedge \neg Q)$, så $\neg(P \vee Q) \sim (\neg P \wedge \neg Q)$

Observera att A och B är *utsagor*, inte (nödvändigtvis) variabler.

(a) Visa att $\sim$ är en ekvivalensrelation på M.

(b) Låt

$$K = \{[A]_\sim \mid A \in M\},$$

d.v.s K är mängden av ekvivalensklasser i M med avseende på $\sim$.

Definiera relationen Ψ på K via

$$[A]\Psi[B] \text{ om och endast om } A' \Rightarrow B' \text{ för något } A' \in [A] \text{ och något } B' \in [B].$$

Visa att Ψ är en partiell ordning.

(c) Finns det några minimala/maximala element i K_Ψ? Finns det ett största/minsta element i K_Ψ?

(d) Är K_Ψ en Boolesk algebra?

(e) Om vi begränsar antalet variabler i våra utsagor till n, hur många element har då K_Ψ?

12. Låt $\sim$ vara en ekvivalensrelation på en mängd M och låt

$$D = \{A \subseteq M \mid \text{ om } x, y \in A \text{ då } x \sim y\}.$$

Låt P vara delmängdsalgebran på D. Visa att de maximala elementen i den partiella ordningen P är ekvivalensklasserna för $\sim$.

13. För vilka n är $\mu(1, n) \neq 0$ i delbarhetsgittret S_n? Eller, ännu bättre, bestäm $\mu(x, y)$ för godtyckliga x och y i S_n. Ledning: Titta på exemplen S_6, S_{12}, S_{30}, S_{90}.