Motivera alla svar. Spara lösningarna (med mina kommentarer) när ni får tillbaka dem. Detta gäller alla inlämningsuppgifter och det är mycket viktigt

Uppvärmning

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(i) Bestäm alla kodord i koden som genereras av matrisen i marginalen. Hur många fel upptäcker koden? Hur många fel rättar den? Bestäm den motsvarande kontrollmatrisen.

(ii) Det finns en $(3, 1)$–Hammingkod.

(a) Konstruera en kontrollmatris för denna kod så att kolonnerna motsvarar talen 1, 2, 3 skrivna binärt (titta på matrisen för $(7, 4)$–Hammingkoden i stencilen).

(b) Bestäm matrisens *kärna* (nollrum) och därmed alla kodorden i denna kod.

(c) Rita koden som hörn i den 3-dimensionella enhetskuben och förklara *geometriskt* varför koden rättar ett fel.

(d) Är koden perfekt?

(iii) Låt C vara en kod vars kontrollmatris K har dimensionerna $(n - k) \times n$ och vars generatormatris G är $n \times k$.

(a) Hur förändras koden om man kastar om raderna eller kolonnerna i K? Vad händer om man adderar en rad till en annan? En linjärkombination av några rader till en annan rad?

(b) Vad kan man säga om G i detta avseende?

(c) Antag att C har dimensionen k. Visa att man med hjälp av ovanstående operationer kan överföra K (och G) på normaliserad form som i övning 3 nedan.

(iv) Låt C vara koden som genereras av matrisen G i marginalen.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

(a) Normalisera G.

(b) Bestäm en kontrollmatris och kodens vikt.

(c) Bestäm alla felsyndrom som kan uppstå om det har blivit ett fel i kodordet.

(d) Avkoda orden 0011010, 0001111 och 0101100, d.v.s bestäm, m.h.a kontrollmatrisen, vilket kodord som ligger närmast vart och ett av dess ord.

(v) (Biggs 17.1-4) Visa *triangelolikheten* $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \leq d(\mathbf{x}, \mathbf{z}) + d(\mathbf{z}, \mathbf{y})$, där $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$, $\mathbf{z}$ är element i $\mathbb{Z}_2^n$. Om vi ser elementen i $\mathbb{Z}_2^n$ som hörnen i n-dimensionella enhetskuben, vad säger då denna olikhet (uttryckt i ord)?

(vi) Hur ser generatormatrisen ut för repetitionskoden av längd n? Det var lätt. Hur blir kontrollmatrisen?

(vii) (Biggs 17.2-2) Om $\mathbf{x}$ är ett kodord i en kod av längd n, visa att antalet ord som kan uppstå om man får högst två fel i $\mathbf{x}$ är

$$(n^2 + n + 2)/2.$$

OBS: Skriv först om ovanstående uttryck till en snygg formel med binomialtal.

Just det; *snygg*

Att lämna in fredag den 29 september

Uppgift 3 kan vara till hjälp här

1. (a) Bestäm alla kodord i koden som har följande kontrollmatris.
   (b) Hur många fel upptäcker koden?
   (c) Hur många fel rättar den?

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Denna uppgift är värd 6 poäng. Inga två av delarna är värda lika mycket

2. Låt koden C ha kontrollmatrisen i föregående övning. Om vi utgår från att $k+1$ (samtidiga) fel är mindre sannolika än k fel, för varje $k \geq 0$, bestäm vilket/vilka kodord som sannolikt sänts om vi mottar (transponaten av) följande ord. Motivera svaren noga (fast gärna kort), men var god och skriv svaren *tydligt* i början av lösningen.

   a) 0 1 1 0 1   b) 1 0 1 0 1   c) 0 1 1 1 0

Här måste ni visa att hela kolonnrummet till G tillhör koden *och* att det inte finns några andra kodord (tänk på dimensioner)

3. Låt K vara kontrollmatrisen för en kod C, och antag att $K = [I_k \; M]$, där I_k är en $k \times k$, enhetsmatris och M är en $k \times (n-k)$ matris. Låt $G = \begin{bmatrix} M \\ I_{n-k} \end{bmatrix}$.

   Visa att G är en generatormatris för C, d.v.s att mängden kodord i C består av alla linjära kombinationer (över $\mathbb{Z}_2$) av kolonnerna i G. Med andra ord är C lika med *kolonnrummet* för G.

   Detta kan göras på ett formellt sätt, d.v.s. med elementvisa matrisekvationer, men det blir brutalt. Ogillar ni det kan ni istället förklara i ord vad det är som händer.

   Bonus (2p): Visa att omvändningen också gäller, d.v.s. om G ovan är generatormatrisen för en kod då är K kontrollmatrisen för samma kod. Ledning: Förmodligen har ni redan visat detta; det återstår bara att säga några magiska ord om linjär algebra!

Obs: Koden som nämns i början av övn. 12.14 på stencilen rättar t fel

4. Visa att Hammingkoderna är perfekta (se Övning 12.14 på stencilen). Här skall ni, som vanligt, lämna in ett bevis, men dessutom måste ni *börja med* att kort beskriva bevisets struktur/beståndsdelar. Förhoppningsvis kan detta hjälpa er att strukturera själva beviset.

Bonusproblem (inget samarbete)

En kod C som rättar t fel är *perfekt* om varje hörn i den n-dimensionella enhetskuben ligger på avstånd $d \leq t$ från exakt ett kodord i C.

5. Titta på Övning 12.14 i stencilen. En perfekt binär kod måste uppfylla identiteten där.

   Hur många binära koder av längd mindre än 100, som rättar fler än 1 fel, kan det som mest finnas enligt detta villkor? Vilka av dessa fall är triviala?

   Du måste lösa problemet själv, och du måste förklara hur du har kommit fram till svaret. Däremot behöver du inte bevisa att svaret är korrekt. Det är alltså fritt fram (och förmodligen nödvändigt) att använda datorer som stöd. Antagligen måste du använda något program som klarar heltalsberäkningar med stora heltal, men även med ”vanliga” programmeringsspråk kommer man en bit på vägen.