Motivera alla svar. Spara lösningarna (med mina kommentarer) när ni får tillbaka dem.

Uppvärmning

(i) Låt G vara en ändlig graf och låt $\delta(x)$ beteckna graden av noden x. Visa att $\sum_{x\in G}\delta(x)$ är ett jämnt tal. Visa även att antalet noder av udda grad är jämnt.

(ii) Låt T vara ett godtyckligt träd med n noder. Bestäm T:s kromatiska polynom.

(iii) Bestäm det kromatiska polynomet (på lämplig form!) för den fullständiga grafen K_n.

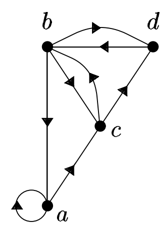
(iv) Låt G vare en bipartit graf med ett udda antal noder. Visa att G inte kan ha en Hamiltoncykel.

(v) Hur många Eulercykler finns det i K_n (den fullständiga grafen på n noder)? Hur många Hamiltoncykler? Två cykler bör betraktas som samma cykel om de innehåller samma kanter.

(vi) Visa att G är ett träd *omm* det finns en unik stig mellan varje par av noder.

(vii) Visa att komponenterna i G utgör en partition av noderna i G.

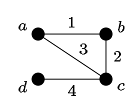
Att lämna in tisdag den 10 oktober



1. Hur många riktade vägar av längd 8 börjar i b i den riktade grafen i marginalen?

   Bonus: För varje $k \geq 2$ verkar det finnas lika många vägar av längd k från a till b som det finns från c till d. Kan ni förklara det? (det kan inte jag).

2. Tänk er en kub i $\mathbb{R}^3$ av sidlängd tre som är uppdelad i enhetskuber med heltalshörn. Gör en nod av varje enhetskub och låt två noder vara grannar om deras kuber delar en sida. Finns det någon väg som börjar i en hörnkubsnod, slutar i mittenkubens nod och som besöker varje nod exakt en gång? Ledning: Färga grafen med $\chi(G)$ färger.



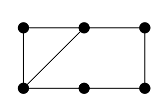
$$\begin{array}{c|cccc} & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline a & 1 & 0 & 1 & 0 \\ b & 1 & 1 & 0 & 0 \\ c & 0 & 1 & 1 & 1 \\ d & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}$$

3. Låt G vara en graf och låt M vara matrisen vars rader indexeras av noderna i G, vars kolonner indexeras av kanterna i G och så att elementet på plats (i, j) är 1 om kant j har sin ena ändpunkt i nod i och 0 annars. Visa att en mängd av kolonner i M är linjärt beroende över $\mathbb{Z}_2$ om och endast om den motsvarande mängden av kanter innehåller en cykel. (En mängd A av vektorer är linjärt beroende över $\mathbb{Z}_2$ om summan av någon icke-tom delmängd i A är nollvektorn (modulo 2).)

   Rättad!

   Bonus(5p): Låt A och B var två delgrafer[1] i en graf G och antag att A och B båda är cykelfria (de är alltså träd eller skogar). Om A har fler kanter än B, visa att någon kant i A kan läggas till B utan att vi får en cykel.

   Bonusdelen kan lösas med hjälp av linjär algebra. Den kan också lösas direkt. I det fallet är det kanske enklare att först tänka sig att A och B är träd.



4. (a) Bestäm det kromatiska polynomet för grafen i marginalen. Kolla att ditt svar ger rätt värden (men lämna inte in uträkningarna!). (30, 480, 3060, 12480).

   (b) Varför är alla värden på detta kromatiska polynom delbara med 30?

[1] En delgraf till en graf G är en delmängd H av noder i G tillsammans med en delmängd av de kanter i G som ligger mellan noder i H.

Bonusproblem (Samarbete tillåtet denna gång men skall redovisas)

5. Låt G vara komplementet till en graf som inte är sammanhängande. Visa att avståndet mellan två noder i G aldrig är större än 2. (Här kan du få 3 poäng om du ger ett mycket kort (men klart) bevis, men problemet är egentligen det som efter följer).

   Beskriv (så enkelt som möjligt) alla grafer som är sammanhängande och har sammanhängande komplement.

6. Låt G vara komplementet till grafen $\bullet\!\!-\!\!\bullet\!\!-\!\!\bullet\!\!- \cdots -\!\!\bullet\!\!-\!\!\bullet\!\!-\!\!\bullet$. Bestäm G:s kromatiska polynom.
   Ledning: Skriv polynomet i rätt bas.

7. Låt $d(v)$ vara graden av noden v och α som i övning 3 nedan. Visa att

$$\alpha(G) \geq \sum_v \frac{1}{d(v)+1},$$

   där v löper över alla noder i G. (Det här är kanske alltför svårt; det enda beviset jag känner till använder sannolikhetslära.)

Ytterligare övningar

1. Låt G vara en ändlig riktad graf som är *acyklisk*, d.v.s som inte har någon riktad cykel. Visa att G har en *källa*, d.v.s en nod med inga kanter riktade *till* sig. Visa att G även har en *sänka*, d.v.s. en nod med inga kanter riktade från sig.

2. Visa att en graf G har åtminstone $\binom{k}{2}$ kanter där $k = \chi(G)$.

3. Låt $\alpha(G)$ vara antalet noder i en största stabil mängd i G. Visa att $\chi(G) \geq |G|/\alpha(G)$.

4. Låt G vara en ändlig riktad graf där varje nod har någon kant riktad från sig. Visa att G har en cykel. Gäller detta om grafen inte behöver vara ändlig? Om svaret är ja, ge bevis, men beskriv annars ett motexempel.

5. Bestäm det kromatiska polynomet till n-cykeln. Ledning: Induktion.

6. Definiera relationen R på noderna i en riktad graf G genom

$$xRy \iff \text{det finns en riktad väg från } x \text{ till } y \text{ i } G.$$

   Ge nödvändiga och tillräckliga villkor på G för att R skall vara en partiell ordning. Gör lösningen så kortfattad som möjligt!

   Bara nödvändiga och tillräckliga villkor. Inget annat! (Utom motiveringen)

7. Visa att varje ändlig graf med minst två noder har två noder av samma grad.

8. Färga en graf G så här: Välj någon stabil mängd i G som har största möjliga antal noder. Ge dem färgen 1. Avlägsna dessa noder och alla deras kanter från G och gör samma sak med den nya grafen, fast nu med färg 2. Fortsätt tills alla noder är färgade. Hur många färger har vi använt (fler än $\chi(G)$)?

9. Låt oss istället i varje steg välja en maximal stabil mängd, d.v.s. en stabil mängd som inte kan utökas med någon nod utan att bli instabil. Vad blir svaret nu?