

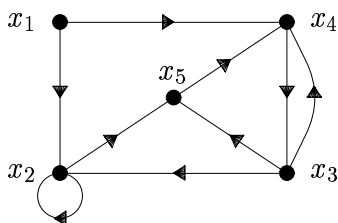
**Kantmatriser och vägmatiser**

Låt  $G$  vara en riktad graf med noder  $x_1, x_2, \dots, x_n$ . Kantmatrisen till  $G$  är matrisen

$$K_G = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & & \vdots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

där  $a_{ij} = 1$  om  $G$  har en riktad kant från  $x_i$  till  $x_j$ , och  $a_{ij} = 0$  annars.

**Exempel:**



$$K_G = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Om man multiplicerar  $K_G$  med sig själv får man

$$K_G^2 = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{15} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{25} \\ & & \vdots & \\ b_{51} & b_{52} & \cdots & b_{55} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Funderar man på saken en stund (gör det!) kan man se att 1:an på plats (1,3), d.v.s  $b_{13} = 1$ , innebär att det finns en *riktad väg* av längd 2 från  $x_1$  till  $x_3$ , d.v.s en följd av två riktade kanter, från  $x_1$  till  $x_k$  respektive från  $x_k$  till  $x_3$ , där  $x_k$  är någon av noderna i  $G$ . Nämligen, att  $b_{13} = 1$  beror på att när vi multiplicerade  $K_G$  med sig själv, då fick vi  $b_{13} = a_{11}a_{13} + a_{12}a_{23} + a_{13}a_{33} + a_{14}a_{43} + a_{15}a_{53} = 0 \cdot 0 + 1 \cdot 0 + 0 \cdot 0 + 1 \cdot 1 + 0 \cdot 0 = 1$ . Med andra ord så var det när vi multiplicerade ihop  $a_{14}$  och  $a_{43}$  som vi fick 1, och alla andra termer blev 0. Att  $a_{14} = 1$  och  $a_{43} = 1$  betyder, enligt definitionen av  $K_G$ , att det finns en riktad kant från  $x_1$  till  $x_4$  respektive från  $x_4$  till  $x_3$ , vilket innebär att det finns en riktad väg av längd 2 från  $x_1$  till  $x_3$ .

Upprepar vi det här resonemanget ser vi att i

$$K_G^3 = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{15} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{25} \\ & & \vdots & \\ c_{51} & c_{52} & \cdots & c_{55} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

är  $c_{35} = 2$ , vilket motsvarar att det finns två riktade vägar av längd 3 från  $x_3$  till  $x_5$ . Dessa vägar är  $x_3 \rightarrow x_2 \rightarrow x_2 \rightarrow x_5$  respektive  $x_3 \rightarrow x_4 \rightarrow x_3 \rightarrow x_5$ . Observera att den första av

dessa två vägar snurrar runt ett varv på öglan vid  $x_2$ , vilket är tillåtet enligt vår definition av riktad väg. Den andra vägen är också lite virrig, eftersom den först går till  $x_4$  och sen tillbaka till  $x_3$  innan den går till målnoden  $x_5$ .

Om man räknar  $K_G^3$  genom att multiplicera  $K_G^2 \cdot K_G$  ser man att  $c_{35}$  i  $K_G^3$  blir 2 därför att 1:orna på platserna (3,2) i  $K_G^2$  och (2,5) i  $K_G$  respektive 1:orna på platserna (3,3) i  $K_G^2$  och (3,5) i  $K_G$  multipliceras ihop och bidrar med var sin etta till summan  $2 = c_{35}$  i  $K_G^3$ . Att multiplicera ihop 1:orna på platser (3,2) i  $K_G^2$  och (2,5) i  $K_G$  motsvarar att man lägger ihop vägen av längd 2 från  $x_3$  till  $x_2$  och vägen av längd 1 (kanten) från  $x_2$  till  $x_5$  för att få vägen av längd 3 från  $x_3$  till  $x_5$ .

I allmänhet kan man använda samma argument för att visa att elementet på plats  $(i, j)$  i  $K_G^n$  är lika med antalet vägar av längd  $n$  från  $x_i$  till  $x_j$  i  $G$ .

Om vi nu bara är intresserade av att veta om det finns en väg av längd  $n$  från  $x_i$  till  $x_j$ , men inte bryr oss om hur många, då kan vi istället för  $K_G^n$  ta fram den  $n$ :te booleska potensen av  $K_G$ , där varje positivt element i  $K_G^n$  ersätts med 1. M.a.o så utför man matricmultiplikationen så att  $1 + 1 = 1$ .

Vill vi veta mellan vilka par av noder det finns någon väg, oavsett längd, då kan vi ta alla booleska potenser av  $K_G$  och addera dessa booleskt, d.v.s addera alla element på plats  $(i, j)$  enligt regeln  $1+1=1$  för att få fram elementet  $(i, j)$  i vägmatri sen  $V_G$  för  $G$ . Om det finns någon väg mellan  $x_i$  och  $x_j$  i en graf  $G$ , då måste det finnas en väg av längd högst  $n$  där  $n$  är antalet noder i  $G$  (varför?). Det räcker därför att addera de första  $n$  booleska potenserna av  $K_G$  för att få fram vägmatri sen  $V_G$ . Alltså har vi

$$V_G = K_G \oplus K_G^{*2} \oplus K_G^{*3} \oplus \dots \oplus K_G^{*n}$$

där  $\oplus$  är booleskt plus och  $K_G^{*m}$  är den  $m$ :te booleska potensen av  $K_G$ .

**Exempel:** För  $G$  som ovan har vi

$$\begin{aligned} V_G &= K_G \oplus K_G^{*2} \oplus K_G^{*3} \oplus K_G^{*4} \oplus K_G^{*5} = \\ &\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \oplus \\ &\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

vilket överensstämmer med att det finns en väg mellan varje par av noder, förutom att det finns inga vägar till  $x_1$ . Observera att  $K_G^{*4} = K_G^{*5} = V_G$  och att faktiskt  $V_G = K_G^{*2} \oplus K_G^{*3}$ . Kan du förklara detta?