Kromatiska polynom

Att färglägga en graf G är att ge varje nod i G en färg så att inga grannar (två noder med en kant sinsemellan) får samma färg. Att färglägga G med (högst) n färger innebär att vi har n färger att välja bland och skall använda några av dessa för att färglägga G.

Här är en mer precis definition.

Definition 1 Låt G vara en graf med nodmängd N. En *färgläggning av G med n färger* är en funktion $f : N \longrightarrow \{1, 2, \ldots, n\}$ så att $f(x) \neq f(y)$ om x och y har en kant sinsemellan.

Definition 2 Låt G vara en ändlig graf. Det *kromatiska polynomet till G* är funktionen $\chi_G(n)$, definierad för varje positivt heltal n som antalet färgläggningar av G med n färger.

Sats: Det kromatiska polynomet är ett polynom i n.

Observera att det *kromatiska talet* för G, $\chi(G)$, är lika med det minsta positiva heltalet n för vilket $\chi_G(n)$ är större än 0. (Det kromatiska talet är det minsta antal färger som behövs för att färglägga G).

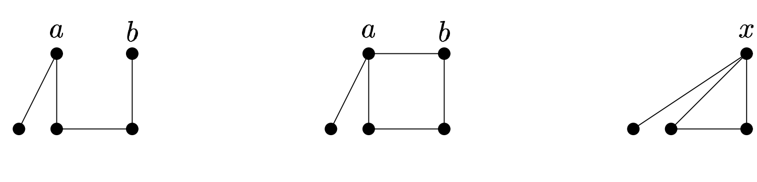
Det finns ingen snabb algoritm för att bestämma det kromatiska talet till en graf G och därmed finns det inte heller något snabbt sätt att bestämma det kromatiska polynomet till G. Mer exakt tillhör dessa problem klassen NP, det vill säga att det inte finns någon algoritm som i polynomiell tid ger svaren.

Ett sätt att bestämma det kromatiska polynomet till en graf G är följande:

Sats 3 *Given en ändlig graf G, och två olika noder a, b i G, så att (a, b) inte är en kant i G, låt G_{a-b} vara grafen som fås genom att lägga till en kant mellan a och b i G, och låt $G_{a=b}$ vara grafen som fås genom att ersätta a och b med en nod x så att x har en kant till varje nod som a eller b har en kant till i G. Då är*

$$\chi_G(n) = \chi_{G_{a-b}}(n) + \chi_{G_{a=b}}(n). \tag{1}$$

Bevis: Varje färgning av G där a och b har olika färger motsvarar en färgning av G_{a-b} och omvänt. Varje färgning av G där a och b ha samma färg motsvarar en färgning av $G_{a=b}$ och omvänt. □



$$\chi_G(n) \quad = \quad \chi_{G_{a-b}}(n) \quad + \quad \chi_{G_{a=b}}(n)$$

Observera att den rekursiva formeln i Sats 3 även kan skrivas så här:

$$\chi_{G_{a-b}}(n) = \chi_G(n) - \chi_{G_{a=b}}(n). \tag{2}$$

Att använda denna version av formeln innebär att avlägsna kanter från G tills vi bara har isolerade noder kvar. Vilken av dessa två formler som är effektivast för att bestämma det kromatiska polynomet till en graf G beror på G:s struktur. Om G är gles, det vill säga har relativt få kanter, då är (2) oftast att föredra, men (1) om G har relativt många kanter.

Stable eller *independent* på engelska

Definition 4 Låt G vara en graf och M en mängd av noder i G. Mängden M är *stabil* om inga två noder i M utgör en kant i G.

Definition 5 Den i-te *fallande fakulteten* av n är $(n)_i = n(n-1)(n-2)\cdots(n-i+1)$. Vi sätter $(n)_0 = 1$.

En färgning av G med k färger ger alltid upphov till en partition av noderna i G i k stabila mängder, eftersom varje mängd av likfärgade noder måste vara stabil. Omvänt ger en partition av noderna i G i k stabila mängder en färgning av G med k färger, genom att de stabila mängderna tilldelas var sin färg. Om vi har n färger till vårt förfogande kan detta göras på $n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)$ olika sätt, det vill säga på $(n)_k$ olika sätt. Därav följande sats.

Sats 6 *Låt $S_G(k)$ vara antalet sätt att dela upp noderna i G i k stabila mängder. Då har vi*

$$\chi_G(n) = \sum_k S_G(k)(n)_k.$$

Ur denna sats följer direkt att $\chi_G(n)$ är ett polynom i n, för $(n)_k$ är uppenbarligen ett polynom i n för varje k. Det följer också att $\chi_G(n)$ har heltalskoefficienter.

Nyttig övning: Skriv alla definitionerna i samma stil som den första

Terminologin i grafteorin är tyvärr långt ifrån standardiserad. Här nedan ger jag några (informella) definitioner som kan vara användbara.

En *promenad* i en graf G är en följd $x_1, x_2, \ldots, x_k$ av noder i G så att (x_i, x_{i+1}) är en kant för varje $i < k$.

En *väg* är en promenad som inte går över samma kant mer än en gång.

En *stig* är en väg som inte besöker en nod mer än en gång.

En *cykel* är en väg som börjar och slutar i samma nod

En *cirkel* är en stig som börjar och slutar i samma nod