Relationer

Alla vet vad en relation är. Den matematiska definitionen av relation syftar till att formalisera detta begrepp för att det skall kunna användas i olika — och mycket vidare — sammanhang än vad som är vanligt i vardagsspråk. Att vara släkting till någon, eller barn till någon, eller att gå i samma klass som någon, är exempel på vanliga relationer. Men vi vill även studera sådana relationer som att vara äldre än någon, eller för två tal att ge samma rest när de delas med 18, eller för en binär sträng $\mathbf{x}$ att ha ettor på alla platser där en sträng $\mathbf{y}$ har ettor.

En relation definieras på en mängd (som kan bestå av människor, eller tal, eller vad som helst) och den kan beskrivas genom att säga vilka par av element i mängden står i den givna relationen till varandra. Mängden av alla (ordnade) par av element i en mängd kallas *kryssprodukten* av mängden med sig själv, och definitionen blir så här:

Definition 1 En *relation* $\mathcal{R}$ på en mängd M är en delmängd i kryssprodukten $M \times M$.

Observera att kryssprodukten består av alla *ordnade* par av element från M. Det innebär att paret (a, b) *inte* är detsamma som (b, a). Med andra ord finns en ”riktning” i en relation $\mathcal{R}$ eftersom förekomsten av (a, b) i $\mathcal{R}$ — vilket betyder att a står i relationen $\mathcal{R}$ till b — *inte* medför att b står i relationen $\mathcal{R}$ till a.

Låt $\mathcal{R}$ vara relationen ”mindre än” på mängden $M = \{1, 2, 3\}$. Då består $\mathcal{R}$ av de tre paren $(1, 2), (1, 3)$ och $(2, 3)$, som alla är element i $M \times M$. Alltså kan vi skriva

$$\mathcal{R} = \{(1, 2), (1, 3), (2, 3)\}.$$

Ett annat sätt att beskriva att 1 står i relationen $\mathcal{R}$ till 2 är att skriva $1\mathcal{R}2$.

Vi studerar främst följande fyra egenskaper hos relationer:

Definition 2 En relation på en mängd M är

1. *reflexiv* om det för varje $x \in M$ gäller $x\mathcal{R}x$,
2. *symmetrisk* om det för varje par $x, y \in M$ gäller att om $x\mathcal{R}y$ då $y\mathcal{R}x$,
3. *antisymmetrisk* om det för varje par $x, y \in M$ gäller att om $x\mathcal{R}y$ och $y\mathcal{R}x$ då är $x = y$,
4. *transitiv* om det för varje $x, y, z \in M$ gäller att om $x\mathcal{R}y$ och $y\mathcal{R}z$, då $x\mathcal{R}z$.

Observera att endast reflexiviteten ställer några krav på att något element skall vara relaterat till något annat i M. Den tomma relationen, d.v.s relationen $\mathcal{R}$ där $x\mathcal{R}y$ inte gäller för något par (x, y), är symmetrisk, antisymmetrisk och transitiv (men inte reflexiv, om $M \neq \emptyset$). I synnerhet behöver en relation varken vara symmetrisk eller antisymmetrisk, och en relation kan vara både och.

Relationen ”=” har alla fyra egenskaperna och detta är den enda relationen som gör det (bevisa det!).

Definition 3 En relation som är reflexiv, symmetrisk och transitiv kallas *ekvivalensrelation*.

Den viktigaste ekvivalensrelationen för oss är den som används vid ”kongruensräkning.”

Definition 4 Låt n vara ett positivt heltal. Relationen ”kongruens modulo n,” som betecknas $\equiv_n$, definieras på mängden av alla heltal genom

$$x \equiv_n y \iff x - y \text{ är delbart med } n.$$

Det är vanligt att använda symbolen $|$ för att beteckna delbarhet. Närmare bestämt läses ”$a|b$” som ”a delar b.” Att a delar b betyder att b är en heltalsmultipel av a.

Definition 5 Låt $\sim$ vara en ekvivalensrelation på M och $a \in M$. Då är a:s *ekvivalensklass* (med avseende på M) mängden $[a] = \{x \in M \mid a \sim x\}$.

Definition 6 Låt M vara en mängd och $A_1, A_2, \ldots, A_n$ delmängder i M. Då är $\{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$ en *partition av M* om följande två villkor är uppfyllda:

(i) $A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n = M$,

(ii) $A_i \cap A_j = \emptyset$ om $i \neq j$.

En partition av en mängd M är alltså en mängd av icke-tomma delmängder till M så att varje element i M ligger i precis en av delmängderna.

Sats 7 *Ekvivalensklasserna till en ekvivalensrelation på en mängd M utgör en partition av M.*

Med andra ord, om R är en ekvivalensrelation på en mängd M så tillhör varje element i M exakt en ekvivalensklass m.a.p. R.

För många ekvivalensrelationer är det uppenbart vilka ekvivalensklasserna är. Om t.ex relationen är ”att vara född samma år,” då består varje ekvivalensklass av alla de personer som är födda ett visst år. För ekvivalensrelationen ”kongruens modulo 4” (på $\mathbb{N}$) finns exakt fyra ekvivalensklasser, nämligen $\{0, 4, 8, \ldots\}$, $\{1, 5, 9, \ldots\}$, $\{2, 6, 10, \ldots\}$, $\{3, 7, 11, \ldots\}$. Det är ofta användbart att välja ut en representant för varje ekvivalensklass. För ekvivalens modulo 4 väljer man gärna talen 0, 1, 2, 3, som vart och ett är det minsta i sin klass. Mer allmänt, för relationen ”kongruens modulo n,” väljer man oftast talen $0, 1, 2, \ldots, n-1$ som representanter för ekvivalensklasserna. Det är faktiskt just det som de flesta datorspråk använder i sin ”moduloräkning.”

Definition 8 Låt $\sim$ vara en ekvivalensrelation på en mängd M. En mängd $R \subseteq M$ är en *representantmängd* för $\sim$ om R innehåller exakt ett element från varje ekvivalensklass.

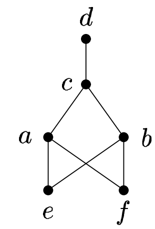
Definition 9 En relation som är reflexiv, antisymmetrisk och transitiv kallas *partiell ordning*.

Ett exempel på en partiell ordning är relationen $\mathcal{R}$ på mängden av alla människor som definieras av

$$x\mathcal{R}y \iff x \text{ är yngre än eller jämngammal med } y.$$

Vi betecknar ofta partiella ordningar med $\leq$. En mängd P tillsammans med en partiell ordning kallas *pomängd*.

En partiell ordning på en ändlig mängd M kan beskrivas med ett *Hassediagram*. I marginalen finns Hassediagrammet för den partiella ordningen på $\{a, b, c, d, e, f\}$ som består av paren (e, a), (e, b), (f, a), (f, b), (a, c), (b, c) och (c, d), tillsammans med alla de par som följer av dessa via transitiviteten, såsom (e, d) som följer av (e, a), (a, c) och (c, d) tillsammans. Dessutom finns förstås varje par (x, x) med i relationen. Observera att vi kan "läsa" i Hassediagrammet att $e \leq d$ eftersom det finns en väg som går uppåt från e till d.

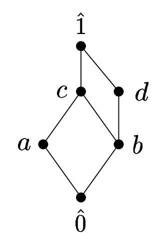


Definition 10 Låt P vara en pomängd (där relationen betecknas $\leq$) och $x, y \in P$. En *övre gräns* för paret x, y är ett element $z \in P$ så att $x \leq z$ och $y \leq z$. En *undre gräns* definieras på analogt sätt.

En *minsta övre gräns* för x, y är ett element z så att z är en övre gräns för x, y och så att varje övre gräns w för x, y uppfyller $z \leq w$. Detta betecknas med $x \vee y = z$. En *största undre gräns* definieras analogt och betecknas med $x \wedge y$.

I Hassediagrammet ovan syns att både c och d är övre gränser för a och b, men den minsta övre gränsen för a och b är $a \vee b = c$. Vidare är både e och f undre gränser för a och b, men ingen av dessa är en största undre gräns, eftersom e och f inte är jämförbara. Alltså existerar inte $a \wedge b$. Däremot är $c \vee d = d$ och $c \wedge d = c$, och mer allmänt har vi att om $x \leq y$ då är $x \vee y = y$ och $x \wedge y = x$.

Definition 11 Ett *gitter* är en pomängd där $x \vee y$ och $x \wedge y$ existerar för varje par (x, y).



Definition 12 Ett element m i ett gitter (eller pomängd) G kallas $\hat{0}$ om $m \leq x$ för alla $x \in G$. Om däremot $x \leq m$ för alla $x \in G$ då kallas m för $\hat{1}$.

Vi säger även att $\hat{0}$ är ett *minsta element* i G och att $\hat{1}$ är ett *största element*. Det är lätt att visa att det bara kan finnas ett minsta och ett största element i ett gitter (pomängd).

I gittret ovan är a och d varandras komplement, men b och c har inga komplement

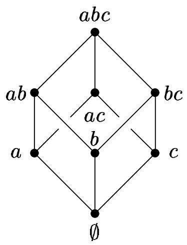
Definition 13 Låt G vara ett gitter med $\hat{0}$ och $\hat{1}$. Ett *komplement* till $x \in G$ är ett element $\bar{x} \in G$ så att $x \wedge \bar{x} = \hat{0}$ och $x \vee \bar{x} = \hat{1}$. G sägs vara *komplementerat* om varje element i G har ett komplement.

Definition 14 Ett gitter G är *distributivt* om det för alla a, b, c i G gäller

$$\begin{aligned} a \wedge (b \vee c) &= (a \wedge b) \vee (a \wedge c), \\ a \vee (b \wedge c) &= (a \vee b) \wedge (a \vee c). \end{aligned}$$

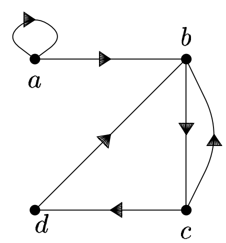
Definition 15 En *Boolesk algebra* är ett komplementerat, distributivt gitter.

Jämför med Definition 24



Ett exempel på en Boolesk algebra — och kanske det mest kända — är *delmängdsalgebran* på en mängd M. Elementen i detta gitter är delmängderna till M och relationen (den partiella ordningen) är inklusion, det vill säga att A är relaterad till B om A är en delmängd i B. I marginalen har vi delmängdsalgebran till mängden $\{a, b, c\}$. Kontrollera att detta är ett komplementerat distributivt gitter (vilket innebär att konstatera att varje delmängd till M har ett komplement (relativt M) och att de distributiva lagarna gäller för union och snitt av mängder).

En relation kan representeras som en matris, och som en riktad graf. Låt t.ex $\mathcal{R}$ vara relationen på mängden $\{a, b, c, d\}$ som består av paren (a, a), (a, b), (b, c), (c, b), (c, d) och (d, b). Då har vi följande graf och matris:



$$\begin{array}{c} \\ a \\ b \\ c \\ d \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} a & b & c & d \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

Sats 16 *Låt $\mathcal{R}$ vara en relation (på en ändlig mängd) och $M = (m_{ij})$ den motsvarande matrisen. Då gäller följande:*

omm = om och endast om

1. *$\mathcal{R}$ är reflexiv omm $m_{ii} = 1$ för alla i.*
2. *$\mathcal{R}$ är symmetrisk omm M är symmetrisk, d.v.s omm $m_{ij} = m_{ji}$ för alla i.*
3. *$\mathcal{R}$ är antisymmetrisk omm $([i \neq j \quad \text{och} \quad m_{ij} = 1] \Rightarrow m_{ji} = 0)$*
4. *$\mathcal{R}$ är transitiv omm $M * M \leq M$, där $A * B$ är AB med alla positiva element reducerade till 1 och $X \leq Y$ betyder att varje element i X är mindre än eller lika med motsvarande element i Y.*

$A * B$ är matrisen som fås genom att utföra multiplikationen $A \cdot B$ med boolesk addition, d.v.s. $1 + 1 = 1$

Påståendena 1, 2 och 3 i satsen är uppenbara. För att se att 4 gäller måste vi studera hur $M * M$ bildas. Det gör vi inte nu, men återkommer till detta.

Definition 17 Låt $\mathcal{R}$ och $\mathcal{S}$ vara relationer på en mängd M. *Kompositionen av $\mathcal{R}$ med $\mathcal{S}$* är relationen på M som definieras av

$$\mathcal{R} \circ \mathcal{S} = \{(x, y) \mid \text{ det finns } z \in M \text{ så att } x\mathcal{R}z \text{ och } z\mathcal{S}y\}.$$

Sats 18 *Om $M_{\mathcal{R}}$ och $M_{\mathcal{S}}$ är matriserna för $\mathcal{R}$ respektive $\mathcal{S}$, då är $M_{\mathcal{R}} * M_{\mathcal{S}}$ matrisen för $\mathcal{R} \circ \mathcal{S}$.*

Kompositionen av två relationer är inte alltid meningsfull, men kan i andra fall vara intressant. Låter vi t.ex $x\mathcal{B}y$ beteckna relationen att x är barn till y, då blir $\mathcal{B} \circ \mathcal{B}$

relationen ”att vara barnbarn til.” Låt nu $\mathcal{B}^2$ beteckna relationen $\mathcal{B} \circ \mathcal{B}$ och, mer allmänt, låt $\mathcal{B}^n$ beteckna relationen $\mathcal{B} \circ \mathcal{B} \circ \cdots \circ \mathcal{B}$ (n gånger). Om vi låter $\mathcal{A}$ vara relationen som är unionen av relationerna $\mathcal{B}$, $\mathcal{B}^2$, $\mathcal{B}^3$, …, då betyder $x\mathcal{A}y$ att x är avkomma till y.

Definition 19 Låt $\mathcal{R}$ vara en relation på mängden M. Det *transitiva höljet till* $\mathcal{R}$ är relationen (på M) som definieras av $T(\mathcal{R}) = \bigcup_{n\geq 1} \mathcal{R}^n = \mathcal{R} \cup \mathcal{R}^2 \cup \mathcal{R}^3 \cup \cdots$.

Att det kallas transitivt hölje beror på att $T(\mathcal{R})$ är den minsta relation som är transitiv och innehåller $\mathcal{R}$. I stencilen *Kantmatriser och vägmatriser* förklaras detta i princip, fast där behandlas frågan bara för kanter och vägar i en graf. Börjar vi med en graf som representerar en relation borde sambandet mellan relationens transitiva hölje och vägmatrisen för grafen bli förståelig. Nämligen, när en relation $\mathcal{R}$ beskrivs med en riktad graf G motsvarar varje par i relationen en riktad kant i grafen. Det transitiva höljet är då relationen vars par motsvarar noder x, y i G för vilka det finns en riktad *väg* från x till y. I synnerhet består relationen $\mathcal{R}^k$ av de par (x, y) för vilka det finns en riktad väg av längd k från x till y.

Att en mängd är minst bland en (möjligtvis oändlig) samling mängder betyder här att den är en delmängd till alla mängder i samlingen.

En tänkbar tillämpning är följande. Antag att vi har ett datorprogram med ett stort antal underrutiner och vi vill veta vilka rutiner som är beroende av vilka andra. En rutin R är beroende av en annan rutin S om R anropar S, men även om det finns en kedja av anrop från R, via andra rutiner, till S. Om vi låter $\mathcal{A}$ vara relationen ”anropar,” så $R\mathcal{A}S$ betyder att R anropar S, då är det transitiva höljet $T(\mathcal{A})$ till $\mathcal{A}$ precis relationen ”beroende av.” Om nu M är matrisen för $\mathcal{A}$, då är M^n matrisen för $\mathcal{A}^n$, och då ges matrisen för $T(\mathcal{A})$ av

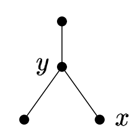
$M^n = M * M * \cdots * M$

$$M_T = M \oplus M^2 \oplus \cdots \oplus M^n,$$

där n är antalet rutiner i programmet och $\oplus$ betecknar boolesk addition (elementvis). Vi kan även se i M_T om det finns någon rekursion i rutinerna, det vill säga om en rutin är beroende av sig själv. Hur?

Varför räcker det med M^n?

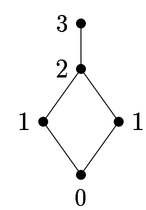
Definition 20 *Om x och y är element i ett gitter så att $x \leq y$ och så att det inte finns något z skilt från x och y så att $x \leq z \leq y$, då säger vi att y* täcker *x, vilket betecknas $x \lessdot y$.*



y täcker x

I Hassediagrammet betyder detta att y ligger strax ovanför x.

Definition 21 Ett (ändligt) gitter G är *graderat* om det för varje $x \in G$ gäller att varje uppåtgående väg längs kanter i Hassediagrammet från $\hat{0}$ till x har samma längd. I så fall är *rangen* av x antalet kanter i en sådan väg.



Rang

Rangen av ett element x är alltså längden (antal element minus ett) av varje *kedja* $\hat{0} \lessdot x_1 \lessdot x_2 \lessdot \cdots \lessdot x$.

Definition 22 Låt G och H vara två gitter. En *(gitter)homomorfi från G till H* är en funktion $\phi : G \longrightarrow H$ så att

(i) $\phi(x \vee y) = \phi(x) \vee \phi(y)$, och

(ii) $\phi(x \wedge y) = \phi(x) \wedge \phi(y)$

för alla $x, y \in G$. Om ϕ dessutom är bijektiv då är ϕ en *isomorfi*.

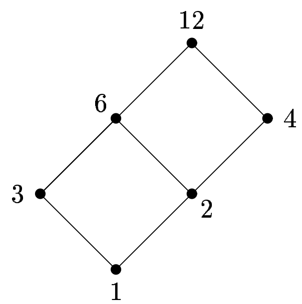
En homomorfi bevarar i någon mån gitterstrukturen i G, d.v.s att ϕ avbildar G på något *delgitter* av H (ett delgitter är en delmängd M i ett gitter H så att M är ett gitter med avseende på relationen i H). Om ϕ är injektiv (inga två element i G skickas till samma element i H), då avbildas G på en "kopia" av sig självt i H. Om ϕ är en isomorfi, då är G och H "identiska" i någon mening. I synnerhet är deras Hassediagram identiska (bortsett från namnen på elementen).

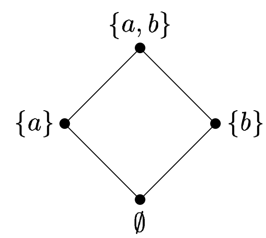
Låt S_{12} vara delbarhetsgittret av alla delare till 12 och låt B_2 vara delmängdsalgebran på mängden $\{a, b\}$. Definiera funktionerna $\phi : S_{12} \longrightarrow B_2$ och $\psi : B_2 \longrightarrow S_{12}$ så här:

$$\phi(1) = \emptyset, \quad \phi(2) = \{b\}, \quad \phi(3) = \{a\}, \quad \phi(6) = \{a, b\}, \quad \phi(4) = \{b\}, \quad \phi(12) = \{a, b\},$$

$$\psi(\emptyset) = 1, \quad \psi(\{a\}) = 3, \quad \psi(\{b\}) = 2, \quad \psi(\{a, b\}) = 6.$$

Båda är homomorfier. Vi ser exempelvis att $\phi(3 \vee 4) = \phi(12) = \{a, b\} = \{a\} \vee \{b\} = \phi(3) \vee \phi(4)$. Om vi studerar Hassediagrammen för dessa gitter kan vi se på ett "grafiskt" sätt hur ϕ och ψ verkar.





Sats 23 *Låt $\phi : G \longrightarrow H$ vara en gitterhomomorfi. Då är $\phi(G) = \{\phi(x) \mid x \in G\}$ ett delgitter till H.*

I exemplet ovan syns till exempel att $\psi(B_2)$ består av den "nedre kvadraten" i S_{12}, vilken är ett gitter, nämligen gittret S_6. Definierar vi ψ som en funktion från B_2 till S_6, men låter dess värden vara som ovan, då blir ψ en isomorfi.

Jämför med Definition 15

Definition 24 (Alternativ definition av Boolesk algebra) En *boolesk algebra* är en mängd M tillsammans med två associativa binära operationer, $\cdot$ och $+$, en unär operation, $^{-}$, och två element $\hat{0}$ och $\hat{1}$, som uppfyller följande villkor för alla element $x, y, z \in M$:

1. $x \cdot y = y \cdot x$, $\qquad x + y = y + x$,
2. $x \cdot (y + z) = (x \cdot y) + (x \cdot z)$, $\qquad x + (y \cdot z) = (x + y) \cdot (x + z)$,
3. $x \cdot \hat{1} = x$, $\qquad x + \hat{0} = x$,
4. $x \cdot \overline{x} = \hat{0}$, $\qquad x + \overline{x} = \hat{1}$.

Vi visar nu att denna definition ger upphov till en partiell ordning. Denna partiella ordning är naturligtvis just en Boolesk algebra, men att visa att definitionerna är *ekvivalenta* — d.v.s att båda definierar samma mängd av partiella ordningar — kräver mer arbete.

Sats 25 *Låt M vara en mängd med operationer som i Definition 24. Definiera relationen $\leq$ på M genom*

$$x \leq y \iff x \cdot y = x.$$

Då är $\leq$ en partiell ordning på M.

Bevis: Eftersom $x \cdot x = x$ (enligt hemuppgift!) har vi $x \leq x$, så $\leq$ är reflexiv.

Vidare har vi att om $x \leq y$ och $y \leq x$ då är $x \cdot y = x$ och $y \cdot x = y$, men $x \cdot y = y \cdot x$, vilket medför att $x = y$, så $\leq$ är antisymmetrisk.

Antag att $x \leq y$ och $y \leq z$. Då är $x \cdot y = x$ och $y \cdot z = y$, så $x \cdot z = (x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z) = x \cdot y = x$, vilket betyder att $x \leq z$ och därmed att $\leq$ är transitiv. $\square$

I det som följer kommer vi att använda $\cdot$ istället för $\wedge$ och $+$ istället för $\vee$ för att beteckna de binära operationerna i en Boolesk algebra.

Definition 26 Låt B och C vara två Booleska algebror. En *boolesk homomorfi* är en funktion $\phi : B \longrightarrow C$ som uppfyller följande villkor för alla x, y i B:

(i) $\phi(x \cdot y) = \phi(x) \cdot \phi(y)$,

(ii) $\phi(x + y) = \phi(x) + \phi(y)$,

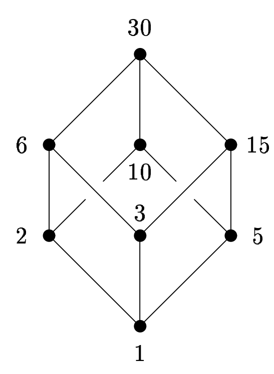
(iii) $\phi(\overline{x}) = \overline{\phi(x)}$,

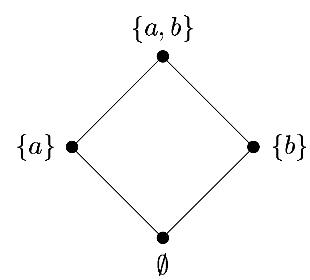
(iv) $\phi(\hat{0}_B) = \hat{0}_C$, $\phi(\hat{1}_B) = \hat{1}_C$. (Här står $\hat{0}_B$ för $\hat{0}$-elementet i B etc.)

Om ϕ dessutom är bijektiv är ϕ en *Boolesk isomorfi*.

Observera att de första två villkoren i definitionen säger att ϕ är en gitterhomomorfi.

Låt nu S_{30} vara delbarhetsgittret för 30 och låt B_2 vara mängdalgebran för en mängd med två element. Deras respektive Hassediagram ser ut så här:





Definiera funktionen $\phi : S_{30} \longrightarrow B_2$ på följande sätt:

$$\phi(1) = \phi(3) = \emptyset, \qquad \phi(2) = \phi(6) = \{a\},$$
$$\phi(5) = \phi(15) = \{b\}, \qquad \phi(10) = \phi(30) = \{a, b\}.$$

Detta är en Boolesk homomorfi, vilket kan verifieras genom att kontrollera att $\phi(x \cdot y) = \phi(x) \cdot \phi(y)$ och $\phi(\overline{x}) = \overline{\phi(x)}$, för alla x, y i S_{30}. (Se Inlämningsuppgift 3). Exempelvis har vi att $\phi(3 + 5) = \phi(15) = \{b\} = \emptyset + \{b\} = \phi(3) + \phi(5)$ och $\phi(\overline{2}) = \phi(15) = \{b\} = \overline{\{a\}} = \overline{\phi(2)}$.

Att ϕ bevarar i någon utsträckning strukturen i S_{30} kan ses på olika sätt. Till exempel skulle vi kunna säga att ϕ ”kollapsar” den övre kvadraten i Hassediagrammet på den nedre och sedan skickar 2 till $\{a\}$, 5 till $\{b\}$ etc. Vi kan som sagt tänka oss att ϕ först ”projicerar” hela S_{30} på S_6 (som motsvaras av den nedre kvadraten) för att sedan byta varje tal mot en delmängd. Vi kan också säga att kollapsen motsvarar att vi delar bort 3 i de tal i S_{30} som är multiplar av 3.

Om vi däremot tänker oss att S_{30} motsvarar delmängdsalgebran för mängden $\{a, b, c\}$, på så sätt att 2 motsvarar $\{a\}$, 5 motsvarar $\{b\}$ och 3 motsvarar $\{c\}$, då kan vi säga att ϕ motsvarar det att vi helt enkelt tar bort elementet c ur alla delmängderna.

Se Definition 20

Definition 27 En *atom* i ett gitter är ett element som täcker $\hat{0}$. En *koatom* är ett element som täcks av $\hat{1}$.

Vi ger nu en följd av satser som tillsammans har som konsekvens (Sats 31) att varje Boolesk algebra är isomorf med en delmängdsalgebra.

Sats 28

(i) *Om x är en atom i en Boolesk algebra B, då gäller för alla $y \in B$ att $xy = \hat{0}$ eller $xy = x$.*

(ii) *Om x_1, x_2 är atomer i B och $x_1 \neq x_2$, då är $x_1 x_2 = 0$.*

Sats 29 *Om $x_1, x_2, \ldots, x_n$ är alla atomerna i en Boolesk algebra B och $x \in B$ ett element så att $xx_i = \hat{0}$ för alla i, då är $x = \hat{0}$.*

Sats 30 *Varje element i en Boolesk algebra kan skrivas på ett unikt sätt som summan av atomer (och som produkten av koatomer).*

Sats 31 *Varje Boolesk algebra är isomorf med delmängdsalgebran för någon mängd.*

Det följer av Sats 31 att en Boolesk algebra med n atomer har 2^n element. Av Sats 30, tillsammans med en av inlämningsuppgifterna, följer att en boolesk homomorfi bestäms fullständigt av sin verkan på atomerna (eller koatomerna).

Definition 32 Låt f vara en formel vars variabler är element i ett gitter eller Boolesk algebra. Den *duala formeln* till f är den formel vi får genom att byta $\wedge$ mot $\vee$ och tvärtom, och $\hat{0}$ mot $\hat{1}$ och tvärtom.

Dualitetsprincipen: Låt f vara en formel som håller i alla gitter (Booleska algebror). Då håller dualen till f också i alla gitter (Booleska algebror).

Observera att vi i Definition 24 har varje likhet på två former, som är varandras dualer (där $+$ motsvarar $\vee$ och $\cdot$ motsvarar $\wedge$).

Det intuitiva beviset av Dualitetsprincipen består i att vända upp och ned på Hassediagrammen till alla gitter/Booleska algebror!