Motivera (bevisa) alla svar. Uppge vilka du samarbetat med. Spara uppgifterna (med kommentarer) när du får tillbaka dem. Detta gäller alla inlämningsuppgifter.

Viktigt!

Uppvärmning

(i) Om 15 lag skall tävla så att varje lag möter varje annat exakt en gång, hur många matcher blir det? Vad är den allmänna formeln för n lag? Obs: Svaret skall *inte* vara en summa!

(ii) Hur många olika ”ord” kan man bilda med bokstäverna i ”kackerlacka” om man måste använda alla elva bokstäverna?

(iii) Antag att vi har $2n$ personer som skall paras ihop två och två. På hur många olika sätt kan detta göras?

(iv) Visa kombinatoriskt att $\sum_i \binom{k}{i}\binom{n-k}{d-i} = \binom{n}{d}$,.

(v) Hur många vägar av minimal längd, längs kanter, från origo till punkten $(1, 1, \ldots, 1)$ finns det i d-dimensionella enhetskuben?

(vi) Förenkla så mycket som möjligt: $\displaystyle\sum_i \sum_k \binom{n}{i}\binom{n-i}{k-i}$. Ledning: Baksidan.

Det är mycket!

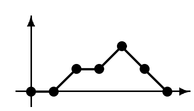
Att lämna in torsdag den 13 september

1. På hur många olika sätt kan man placera n personer runt ett (runt) bord, om man bara bryr sig om den inbördes ordningen? (Om alla t.ex. flyttar en plats har den inbördes ordningen inte ändrats.)

2. Visa *kombinatoriskt* att $\sum_k \binom{n}{k} 2^k = 3^n$. Ledning: Högersidan är antalet *ternära* strängar av längd n. Exempel för $n = 2$: $00, 01, 02, 10, 11, 12, 20, 21, 22$.

3. En *topp* i en permutation $\pi = a_1 a_2 \cdots a_n$ (av talen $1, 2, \ldots, n$) är ett tal i så att $1 < i < n$ och $a_{i-1} < a_i > a_{i+1}$. Hur många permutationer av längd n *utan* toppar finns det? Ledning: Vad händer före resp. efter talet 1 i permutationen? 123, 213, 312, 321

4. En *Motzkinstig av längd n* är en gitterstig i heltalsgittret, med steg av typen $(1, 0)$, $(1, 1)$ och $(1, -1)$, som börjar i $(0, 0)$, slutar i $(n, 0)$ och går aldrig under x-axeln. Hur många Motzkinstigar av längd n finns det som har alla sina $(1, -1)$-steg på slutet?



5. Av de Motzkinstigar som räknades i förra övningen, hur många har exakt k uppsteg? uppsteg = (1,1)

   Låter vi k löpa över alla (möjliga) heltal får vi en summa som måste vara lika med svaret i förra övningen. Skriv upp detta som en sats (som bevisas av dessa två övningar) och förenkla uttrycken så mycket som möjligt.

Bonusproblem (inget samarbete)

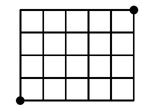
6. Placera n punkter på en cirkel och dra kordan mellan varje par av punkter. Antag att punkterna är *generiskt placerade*, d.v.s att inga tre kordor skärs i samma punkt. Bestäm antalet områden inuti cirkeln (ge en enkel formel och visa den kombinatoriskt).

   Tips: Kolla de första fallen och formulera en gissning. Den var säkert felaktig. Kolla ett par fall till och försök skriva resultatet som en elegant (viktigt!) summa av binomialtal.

Ytterligare övningar

1. Hur många olika $n \times n$ matriser finns det som har exakt en etta i varje rad och varje kolonn, och bara nollor iövrigt?

2. På hur många olika sätt kan man ta sig från $(0,0)$ till (n,k) i planet, om man bara får gå längs kanter i heltalsgittret och bara ta steg uppåt eller till höger? Ge ett *enkelt* kombinatoriskt bevis.



3. Låt M vara en icke-tom mängd, låt j vara antalet delmängder i M som har ett jämnt antal element och låt u vara antalet delmängder i M som har ett udda antal element.

   (a) Använd binomialsatsen för att visa att $j = u$.

   (b) Ge ett kombinatoriskt bevis, d.v.s para ihop varje ”jämn” delmängd med en unik ”udda” delmängd och omvänt.

   (c) Är påståendet sant när $M = \emptyset$? (Detta fall är en av många motiveringar för en viss definition, som ibland uppfattas som onaturlig.)

4. (a) Hur många heltalspunkter finns det i triangeln som har hörn $(1,2)$, $(1,n)$, och $(n-1,n)$? Ge svaret med hjälp av binomialtal och bevisa att det är rätt genom att ge en bijektion till en lämplig mängd av delmängder till en viss mängd (eller, visa hur vi kan ”se” dessa heltalspunkter som delmängderna ifråga).

   En heltalspunkt i planet är en punkt vars båda koordinater är heltal

   (b) Hur många heltalspunkter finns det i triangeln som har hörn $(0,0)$, $(n-2,0)$, och $(0,n-2)$? Bevisa detta genom att ge en bijektion till heltalspunkterna i del (a).

5. Hur många binära strängar av längd n finns det som innehåller exakt k ettor och inte har två på varandra följande ettor?

6. Hur många av delmängderna i $\{1,2,\ldots,n\}$ innehåller inte två på varandra följande tal?

7. Svaret i föregående övning är också svaret på följande fråga: På hur många sätt kan talet $n+1$ skrivas som en summa av 1-or och 2-or (där ordningen spelar roll)? Exempelvis kan 4 skrivas på 5 olika sätt:

$$1+1+1+1, \quad 1+1+2, \quad 1+2+1, \quad 2+1+1, \quad 2+2.$$

   Bevisa detta genom att ge en bijektion. Med andra ord, ”översätt” varje sådan summa till en av delmängderna som räknas i föregående övning, och omvänt.

8. Ge ett kombinatoriskt bevis av identiteten $\binom{a}{b}\binom{b}{c} = \binom{a}{c}\binom{a-c}{b-c}$.

9. I uppgift 2 ovan bestämde ni antalet kortaste vägar från $(0,0)$ till (n,k). Varje sådan väg måste passera diagonalen $y = n-x$ och består således av två unika vägar, den ena från $(0,0)$ till $(k,n-k)$ för något k, och den andra från $(k,n-k)$ till (n,n). Använd detta för att skriva en likhet som i vänsterled består av en summa av produkter av binomialkoefficienter och vars högerled är svaret i Inlämningsuppgift 2.

10. Hur många olika halsband kan man göra av 20 perfekta, lika stora kulor där inga två har samma färg? Antag att halsbandet är slutet, d.v.s att det inte går att säga var det ”börjar”. (Svaret är inte lika med $n!$ för något n.)

11. Hur många av delmängderna till mängden $\{1,2,\ldots,10\}$ innehåller åtminstone ett udda tal?

12. Visa följande likhet (för $p > 0$):

$$\sum_{a=1}^{t} \sum_{b=1}^{p} \binom{p}{b} (t-a)^{p-b} = t^p.$$

Ledning: Vilka värden antar $t - a$ respektive $p - b$? Använd detta för att skriva om. Skriv sedan om binomialkoefficienten och använd binomialsatsen.