Motivera alla svar. Spara uppgifterna (med mina kommentarer) när ni får tillbaka dem. Detta gäller alla inlämningsuppgifter och det är mycket viktigt

Uppvärmning

(i) Bestäm, för var och en av följande relationer på respektive mängder, om relationen är reflexiv, symmetrisk, antisymmetrisk, transitiv.

(a) $xRy \iff x$ vet y:s namn, på mängden av E-teknologer.
(b) $xRy \iff x+y$ är udda, på mängden $\mathbb{N}$.
(c) $xRy \iff x+y$ är jämnt, på mängden $\mathbb{N}$.
(d) $xRy \iff x$ är minst lika lång som y, på mängden av alla svenskar.
(e) $xRy \iff x = 2y$, på mängden $\mathbb{N}$.
(f) $\{(a,a),(b,b),(c,c),(b,a),(a,c),(c,a)\}$, på mängden $\{a,b,c\}$.
(g) $xRy \iff x$ och y har samma lutning, på mängden {linjer i planet}.

Svar: (a)R, (b)S, (c)RST, (d)RTA(?), (e)A, (f)R, (g)RST

(ii) Definiera relationen R på mängden M_n av binära n-bitars ord genom

$$(x_1x_2\cdots x_n)\,R\,(y_1y_2\cdots y_n) \iff x_i \le y_i \text{ för alla } i.$$

Visa att $\mathcal{R}$ är en partiell ordning och rita Hassediagrammet för $n = 3$.

(iii) Låt $M = \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$ där $\mathbb{R}^+$ är mängden av alla positiva reella tal. Definiera relationen S på M genom

$$(a,b)S(c,d) \iff ad = bc.$$

Visa att S är en ekvivalensrelation och beskriv ekvivalensklasserna geometriskt som delmängder i planet $\mathbb{R}^2$. Gör om med $a+b=c+d$ istället för $ad = bc$. Geometriskt betyder här bildmässigt

(iv) Om $\mathcal{R}$ är en relation, låt $\overline{\mathcal{R}}$ vara den *inversa relationen till* $\mathcal{R}$ som definieras av

$$x\overline{\mathcal{R}}y \iff y\mathcal{R}x.$$

(a) Visa att $\mathcal{R}\overline{\mathcal{R}}$ är symmetrisk. (Ja, ni *får* använda linjär algebra).
(b) Om varje nod i grafen till $\mathcal{R}$ har en kant *från* sig, visa att $\mathcal{R} \circ \overline{\mathcal{R}}$ är reflexiv.

(v) Skriv matrisen för relationen i (ii) ovan, först så att elementen i mängden skrivs i ordningen 000,001,011,111,110,100,010,101, och sedan när elementen skrivs i ordningen 000,001,010,100,011,101,110,111. Vad händer? Se uppgift 8 nedan.

(vi) Finn felet i följande "bevis." **Sats:** Låt R vara en relation som är både symmetrisk och transitiv. Då är R även reflexiv. **Bevis:** Antag att xRy. Eftersom R är symmetrisk har vi då även yRx, men av xRy och yRx följer, enligt transitiviteten, att xRx, så R är reflexiv.

(vii) Vad kan man säga om en relation R som är både symmetrisk och antisymmetrisk? I vilken välkänd relation måste R vara en delmängd?

(viii) Definera relationen $\mathcal{R}$ på mängden av alla heltal genom $x\mathcal{R}y$ om $y = x+1$. Ge en enkel beskrivning av transitiva höljet till $\mathcal{R}$.

Att lämna in tisdag den 25 september

1. Låt $M_n = A_n \times A_n$ där $A_n = \{0, \ldots, n-1\}$. Definiera relationen $\mathcal{R}$ på M_n genom

$$< a, b > \; R \; < c, d > \iff a \leq c \text{ och } b \leq d.$$

   (a) Visa att $\mathcal{R}$ är en partiell ordning.

   (b) Om $(a, b) \in M_n$ hur många element $(x, y) \in M_n$ upfyller då $(x, y)\mathcal{R}(a, b)$?

   (c) Rita Hassediagrammet för M_n när $n = 3$.

2. Låt H vara mängden av heltalspunkter i planet. *Centroiden* för två punkter p och q är mittpunkten på sträckan mellan dem och ges av $(p + q)/2$. Definiera relationen $\mathcal{R}$ på H genom

$$p\mathcal{R}q \iff \text{centroiden för } p \text{ och } q \text{ ligger i } H.$$

heltalspunkt: punkt vars koordinater är heltal

$(p + q)/2$: Vektorräkning

   (a) Visa att $\mathcal{R}$ är en ekvivalensrelation.

   (b) Beskriv ekvivalensklasserna och ange det element i varje klass som ligger närmast origo och har icke-negativa koordinater.

   (c) Visa att vilken som helst mängd av fem heltalspunkter i planet innehåller två vars centroid är en heltalspunkt.
   (Skulle detta varit svårare att visa utan att använda ekvivalensrelationen?)

3. Låt $\mathcal{R}$ och $\mathcal{S}$ vara två relationer på samma mängd M.

   (a) Om båda är ekvivalensrelationer är då $\mathcal{R} \circ \mathcal{S}$ en ekvivalensrelation?

   (b) Om båda är partiella ordningar är då $\mathcal{R} \circ \mathcal{S}$ en partiell ordning?

   Om svaret är ja, ge ett bevis. Om svaret är nej, ge ett *enkelt* motexempel, som du beskriver explicit.

4. Ett spel med n tändstickor spelas av två spelare så att man i varje drag skall ta en, två, eller tre stickor. Den vinner som tar sista stickan.

   Definiera en relation $\mathcal{R}$ på $\mathbb{N}$ genom att sätta $a\mathcal{R}b$ om vi i ett drag kan reducera en hög med b stickor till en hög med $a + 1$ stickor men inte a stickor.

$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$

   Låt $\mathcal{S}$ vara det symmetriska höljet till $\mathcal{R}$, d.v.s. $a\mathcal{S}b$ om $a\mathcal{R}b$ eller $b\mathcal{R}a$. Låt $\mathcal{T}$ vara det transitiva höljet till $\mathcal{S}$.

   (a) Visa att $\mathcal{T}$ är en ekvivalensrelation.

   (b) Beskriv ekvivalensklasserna.

   (c) Visa att du kan se till att motståndaren alltid får en position i samma ekvivalensklass efter varje drag du gör, oavsett vad motståndaren gör.

   (d) Om du vill (och kan) vinna, vilken ekvivalensklass skall du lämna över till motståndaren i varje drag?

Bonusproblem (inget samarbete)

5. (a) Visa att varje positivt heltal n delar något tal som (i decimalsystemet) skrivs enbart med ettor och nollor. Exempel: 65 delar 10010.

   (b) Låt n vara ett positivt heltal som varken delas av 2 eller 5. Visa att n delar något tal som skrivs enbart med ettor. Exempel: 273 delar 111111.

Titta på rester vid division (av vad?) med n och använd lådprincipen

Observera att (a) följer av (b)

Ytterligare övningar på kursens hemsida!

1. Låt D vara delbarhetsrelationen på mängden $\{2,3,4,\dots\}$ av naturliga tal större än 1. Vilka är de minimala elementen?

2. Låt M_n vara mängden av alla binära n–bitars ord. Låt $[n]=\{1,2,\dots,n\}$. Definiera relationen S på M_n genom att sätta $x_1x_2\cdots x_n S y_1y_2\cdots y_n \iff$ det finns en bijektion $\phi:[n]\to[n]$ så att $x_i=y_{\phi(i)}$ för varje i. Exempel: $0101S1100$, men *inte* $101S100$.

   Visa att S är en ekvivalensrelation och beskriv ekvivalensklasserna. Bestäm också hur stora de olika ekvivalensklasserna är.

3. Definiera relationen S på mängden av alla positiva heltal genom

   $$aSb \iff ab \text{ är en jämn kvadrat.}$$

   Visa att S är en ekvivalensrelation. *Beskriv* ekvivalensklassen för 1 och den för 12.

   Ett tal n är en jämn kvadrat om $n=k^2$ för något heltal k

   Att beskriva betyder här *inte* att bara stoppa in i definitionen

4. Definiera relationen R på mängden av binära strängar av längd n genom

   $$\mathbf{x}R\mathbf{y} \iff x_i \le x_i\cdot y_i \quad \text{för alla } i,$$

   där $\mathbf{x}=x_1x_2\cdots x_n$ och $\mathbf{y}=y_1y_2\cdots y_n$ och $\cdot$ är vanlig multiplikation. Visa att R är en partiell ordning och rita Hassediagrammet för fallet $n=3$. Kan ni göra beskrivningen av R enklare än den givna?

5. Betrakta relationen ”kongruens modulo 3” på mängden $\{1,2,3,4,5,7\}$. Skriv matrisen för denna relation, först för elementen i växande ordning, sedan när elementen skrivs i ordningen 1,4,7,3,2,5. Vad är det som händer med matrisen i det senare fallet? Varför är det lättare att kvadrera den senare matrisen? Kan man alltid göra så med en ekvivalensrelation?

6. Låt a, b och n vara naturliga tal. Definiera relationen S på mängden av alla heltal genom att sätta

   $$xSy \iff ax+by\equiv 0 \pmod{n}.$$

   För vilka par (a,b) är S en ekvivalensrelation? För vilka par (a,b) är S lika med kongruens mod n?

7. Låt $S_n=\{k\in\mathbb{N}\mid k \text{ delar } n\}$. Detta är ett gitter med avseende på relationen

   $$aDb \iff a \text{ delar } b.$$

   Visa att S_n är ett distributivt gitter. Ledning: Låt $p_1,p_2,\dots,p_k$ vara primfaktorerna i n. Då kan varje tal i S_n representeras av en k-vektor $(a_1,a_2,\dots,a_k)$ där $p_i^{a_i}$ är den största potensen av p_i som delar n. Exempel: I S_{120} representeras 20 av $(2,0,1)$ om $p_1=2$, $p_2=3$ och $p_3=5$. Hur kan man nu representera $\wedge$ och $\vee$ i S_n?

8. Låt M vara matrisen för en pomängd P med relation betecknad $\mathcal{R}$. Visa att M är inverterbar. (I denna uppgift lägger jag stor vikt vid en kort, men klar, presentation!)

   Ledning: Visa först att vi kan ordna elementen i P som $x_1,x_2,\dots,x_n$ så att om $x_i\mathcal{R}x_j$ då är $i\le j$ och att det då blir uppenbart (sats i linjär algebra) att den motsvarande matrisen är inverterbar. Förklara sedan varför denna omordning motsvarar operationer på M som inte påverkar inverterbarhet (igen någon sats i linjär algebra).

   En sådan ordning av elementen i P kallas *topologisk sortering*

   Motivering: Omordningen ovan visar att varje partiell ordning är en delmängd i en total ordning (varför?). Det innebär att vi kan alltid hitta en total ordning som *respekterar* P (se bonusuppgift), vilket är ett vanligt problem (exempelvis när underrutiner i ett program måst kompileras i ”rätt” ordning). Att det kan göras på ett sätt som visar att matrisen är inverterbar är intressant i sig, för det är bakgrunden till teorin om *Möbiusfunktionen* til en pomängd (se bonusuppgift näst gång).

   Talteorins Möbiusfunktion är ett specialfall, där pomängden är delbarhetspomängden på de positiva heltalen

9. Låt M vara mängden av alla satslogiska utsagor (ett exempel på en sådan utsaga är $P \longrightarrow (Q \vee \neg R)$). Definiera relationen Ψ på M genom

$$A \Psi B \text{ om och endast om } B \text{ följer av } A.$$

Avgör om Ψ är en ekvivalensrelation och/eller partiell ordning.

10. För vilka n uppfyller $\mathbb{Z}_n$ att det för varje $a \in \mathbb{Z}_n$ så att $a \not\equiv 0$ finns ett $b \in \mathbb{Z}_n$ så att $ab \equiv 1 \bmod n$? Ledning: För vilka n finns x, y i $\mathbb{Z}_n$ så att $ax \equiv ay$ för något $a \not\equiv 0$, men $x \not\equiv y$? Betrakta sedan $\{ax \mid x \in \mathbb{Z}_n\}$.

11. Definiera relationen R på noderna i en riktad graf G genom

$$xRy \iff \text{det finns en riktad väg från } x \text{ till } y \text{ i } G.$$

Ge nödvändiga och tillräckliga villkor på G för att R skall vara en partiell ordning. Gör lösningen så kortfattad som möjligt! OBS: Blanda inte ihop kant och väg!

Bara nödvändiga och tillräckliga villkor. Inget annat!

Riktad väg = *directed walk*
kant = *edge*