Motivera (bevisa) alla svar. Uppge vilka du samarbetat med. Spara lösningarna (med kommentarer) när du får tillbaka dem. Detta gäller alla inlämningsuppgifter och det är mycket viktigt.

Uppvärmning

(i) Visa De Morgans lagar för Booleska algebror: $\overline{(x+y)} = \overline{x} \cdot \overline{y}$ och $\overline{(x \cdot y)} = \overline{x} + \overline{y}$. Du får endast använda Definition 24 på stencilen om relationer (och föregående uppgift).

(ii) Varje element i en Boolesk algebra kan skrivas på ett unikt sätt som summan av atomer. Varför är detta så uppenbart för den Booleska algebran av alla delmängder till en mängd?

(iii) Låt B_n vara den Booleska algebran av alla binära strängar av längd n. Definiera $\phi : B_3 \longrightarrow B_2$ genom $\phi(x_1x_2x_3) = x_1x_2$. Är detta en Boolesk homomorfi?

(iv) Om vi istället sätter $\phi(x_1x_2x_3) = x_1y$, där $y = x_2 \cdot x_3$, är ϕ då en Boolesk homomorfi?

(v) Hur många isomorfier finns det från den Booleska algebran B_n till sig själv?

(vi) Utgående från definitionen av Boolesk homomorfi (Definition 26) och Definition 24, visa att ϕ är en Boolesk homomorfi om ϕ bevarar $+$ och $^{-}$, det vill säga om $\phi(x+y) = \phi(x) + \phi(y)$ och $\phi(\overline{x}) = \overline{\phi(x)}$.

Att lämna in tisdag den 2 oktober

1. Visa att i en Boolesk algebra gäller, för alla x, att $x \cdot x = x$ och $x \cdot \hat{0} = \hat{0}$. Du får endast använda Definition 24 på stencilen om relationer!

2. Låt $S_n = \{k \in \mathbb{N} \mid k \text{ delar } n\}$. Detta är ett distributivt gitter med avseende på relationen $aDb \iff a$ delar b.

   För vilka n är S_n en Boolesk algebra? Observera att du måste visa att S_n är en Boolesk algebra för de n du beskriver, och att S_n inte är det för andra n. Definition 15

   Bonus(5p): Visa att S_n är distributivt för alla n. (Här ställs det stora krav på framställning och rigorositet!) Ledning: Hassediagrammet för S_n kan beskrivas som en del i heltalsgittret i $\mathbb{R}^n$. Använd detta för att representera elementen i S_n med vektorer och definiera sedan $\wedge$ och $\vee$ direkt på vektorerna. Samarbete tillåtet här

3. Låt S_n vara som i föregående övning. Låt B_2 beteckna den booleska algebran med två element, 0 och 1. Definiera funktionen $\phi : S_n \to B_2$ genom

$$\phi(x) = \begin{cases} 0 & \text{om } x \text{ udda} \\ 1 & \text{om } x \text{ jämnt} \end{cases}$$

   (a) Är ϕ en gitterhomomorfi?

   (b) I de fall då S_n är en boolesk algebra, är ϕ en boolesk homomorfi? Ledning: dela upp i två fall: n jämnt, resp. n udda. Använd övning (vi) ovan.

4. Låt B vara matrisen för relationen ”barn till,” och låt Y vara matrisen för relationen ”yngre än” (båda definerade på samma mängd). Ge en enkel formel (med bara matriser) för matrisen vars (i,j)-element är antalet *barnbarn* till i som är *äldre* än j.

Bonusproblem (inget samarbete)

5. Varje ändlig boolesk algebra har atomer, som bestämmer hela algebran. Visa att det finns booleska algebror utan atomer. Ledning: Tag alla intervall $[x, +\infty)$ på reella linjen. Använd dessa för att bygga upp en sådan boolesk algebra (ni behöver förstås fler intervall än ovanstående för att det skall bli en boolesk algebra).

Ytterligare övningar

1. I boken *Grundläggande digital- och datorteknik* finns, i avsnittet Boolesk algebra, nio såkallade "satser" för Boolesk algebra. Några av dessa ingår i vår alternativa definition av Boolesk algebra. Visa de andra utgående enbart från vår definition.

2. I Definition 24 på stencilen om relationer sägs det (implicit) att i en Boolesk algebra har varje element ett komplement. Visa att det finns endast ett komplement till varje element. Med andra ord, om y uppfyller villkoren för $\bar{x}$, då är $y = \bar{x}$. Du får endast använda Definition 24!

3. Visa att i en Boolesk algebra gäller $x + x = x$, $x + \hat{1} = \hat{1}$, och $\overline{\hat{0}} = \hat{1}$. Du får endast använda Definition 24 på stencilen om relationer!

4. Låt B_n vara som i föregående övning och låt S_{30} vara delbarhetsgittret för 30. Definiera $\phi : S_{30} \longrightarrow B_2$ genom $\phi(n) = xy$ där $x = 1$ om n är jämnt och $x = 0$ annars, och y är det största heltalet k så att 5^k delar n. Är ϕ en Boolesk homomorfi?

5. Låt B_n vara den Booleska algebran av alla binära strängar av längd n där operationerna är bitvis multiplikation resp. bitvis Boolesk addition. n där operationerna är bitvis multiplikation resp. bitvis Boolesk addition. Avgör om $\phi : B_3 \longrightarrow B_1$ är en Boolesk homomorfi:

$$\phi(x_1x_2x_3) = \begin{cases} 1, & \text{om } x_1 + x_2 + x_3 \text{ udda} \\ 0 & \text{annars} \end{cases}$$

Obs: $x_1x_2x_3$ är en trebitars *sträng*, $x_1 + x_2 + x_3$ är vanlig addition

6. Låt $\mathcal{R}$ vara en relation på en ändlig mängd M och $\mathcal{R}^n$ relationen som är $\mathcal{R}$ sammansatt med sig själv n gånger. Visa att $\mathcal{R}^n$ är transitiv för något n.

   Ledning: Beskriv $\mathcal{R}^n$ i termer av vägar i relationsgrafen för $\mathcal{R}$. Låt n vara antalet element i M.

   Visa också att det finns ett $k \in \mathbb{N}$ så att $\mathcal{R}^{k+m} = \mathcal{R}^k$ för alla $m \in \mathbb{N}$. Vilket är det minsta k för vilket detta gäller?

7. Låt M_R vara relationsmatrisen för en relation R. Kan man säga något allmänt om M_R:s inverterbarhet när R är en ekvivalensrelation respektive partiell ordning? Ledning: Varje partiell ordning är en delmängd till en total ordning.

8. Hur många element av rang k finns det i delbarhetsgittret för S_{510510}?

   Ledning: Hitta en isomorfi från S_{510510} till en lämplig Boolesk algebra.

För definitionen av rang, se stencilen om relationer

9. Låt G vara ett gitter och B en Boolesk algebra. Antag att det finns en funktion $\phi : B \longrightarrow G$, som bevarar $\hat{0}$, $\hat{1}$ och komplement, det vill säga $\phi(\hat{0}_B) = \hat{0}_G$, $\phi(\hat{1}_B) = \hat{1}_G$, och $\phi(\bar{x})$ är ett komplement (i G) till $\phi(x)$ för alla $x \in B$. Visa att G är en Boolesk algebra.

10. Låt P pomängden av alla naturliga tal som är lika med 1 eller delbara med 3 eller 5 eller 7 och där relationen är delbarhet. Låt Q vara pomängden $\mathbb{N}^3$ med relationen

$$(x_1, x_2, x_3) \leq (y_1, y_2, y_3) \iff x_i \leq y_i \quad \text{för } i = 1, 2, 3.$$

   Visa att P och Q är isomorfa.

11. Låt M vara mängden av alla satslogiska utsagor. Definiera relationen $\sim$ på M genom

$$A \sim B \text{ om och endast om } B \iff A,$$

d.v.s $A \sim B$ betyder att A och B är ekvivalenta utsagor. M.a.o är A sann om och endast om B är sann.

Exempel: $\neg(P \vee Q) \iff (\neg P \wedge \neg Q)$, så $\neg(P \vee Q) \sim (\neg P \wedge \neg Q)$

Observera att A och B är *utsagor*, inte (nödvändigtvis) variabler.

(a) Visa att $\sim$ är en ekvivalensrelation på M.

(b) Låt

$$K = \{[A]_\sim \mid A \in M\},$$

d.v.s K är mängden av ekvivalensklasser i M med avseende på $\sim$.

Definiera relationen Ψ på K via

$$[A]\Psi[B] \text{ om och endast om } A' \Rightarrow B' \text{ för något } A' \in [A] \text{ och något } B' \in [B].$$

Visa att Ψ är en partiell ordning.

(c) Finns det några minimala/maximala element i K_Ψ? Finns det ett största/minsta element i K_Ψ?

(d) Är K_Ψ en Boolesk algebra?

(e) Om vi begränsar antalet variabler i våra utsagor till n, hur många element har då K_Ψ?

12. Låt $\sim$ vara en ekvivalensrelation på en mängd M och låt

$$D = \{A \subseteq M \mid \text{ om } x, y \in A \text{ då } x \sim y\}.$$

Låt P vara delmängdsalgebran på D. Visa att de maximala elementen i den partiella ordningen P är ekvivalensklasserna för $\sim$.