Exempel på kombinatoriska bevis

Sats 1 *För alla naturliga tal n gäller* $\sum_k \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}$.

$\sum_k$ är summan över *alla* heltal k

Idén i beviset är denna: Väljer vi en n-delmängd ur en $2n$-mängd, då måste vi ha valt ett antal element, säg k, bland de n första, och resten, d.v.s $n-k$, bland de n sista. För att få alla möjliga n-delmängder måste vi tillåta k att variera mellan 0 och n.

Bevis: Vi skriver först om vänsterledet till $\sum_k \binom{n}{k}\binom{n}{n-k}$. Termen för $k=i$ i denna summa är lika med antalet sätt att välja en i-delmängd A ur en n-mängd och sedan, oberoende av hur A valts, välja en $(n-i)$-delmängd B ur en n-mängd.

Om vi på detta sätt väljer delmängden A ur mängden $\{1,2,\ldots,n\}$ och sedan väljer delmängden B ur mängden $\{n+1, n+, 2, \ldots, 2n\}$, då har vi valt $i+(n-i)=n$ element ur mängden $\{1,2,\ldots,2n\}$.

Det är klart att man för två olika val av mängder (A,B) får två olika n-delmängder ur $\{1,2,\ldots,2n\}$. När k löper genom talen från 0 till n uppstår varje n-delmängd ur $\{1,2,\ldots,2n\}$ på detta sätt. Alltså uppstår varje n-delmängd ur $\{1,2,\ldots,2n\}$ exakt en gång på detta sätt. Men antalet olika sätt att välja en n-delmängd ur mängden $\{1,2,\ldots,2n\}$ är just $\binom{2n}{n}$. $\square$

Sats 2 *Låt k och n vara naturliga tal. Antalet sätt att skriva k som summan av n naturliga tal, där ordningen är väsentlig, är* $\binom{n+k-1}{n-1}$.

Exempelvis kan 2 skrivas på $\binom{2+3-1}{3-1} = \binom{4}{2} = 6$ sätt med tre tal:

$$0+0+2, \quad 0+2+0, \quad 2+0+0, \quad 0+1+1, \quad 1+0+1, \quad 1+1+0.$$

Bevis: Talet $\binom{n-1+k}{n-1}$ är lika med antalet binära strängar av längd $n-1+k$ som har exakt $n-1$ nollor. Vi visar hur varje sådan sträng ger upphov till ett unikt sätt att skriva k som summan av n naturliga tal, och hur varje sådan summa motsvarar en unik binär sträng av längd $n-1+k$ med exakt $n-1$ nollor.

En binär sträng som ovan kan förvandlas till en summa av den rätta formen genom att förvandla varje nolla till ett plustecken och sedan ersätta varje sammanhängande sträng av ettor mellan två plustecken med det tal som motsvarar antalet ettor i strängen (noll om det inte står några ettor mellan två plustecken). Samma sak gör vi med den sträng som föregår den första nollan och den sträng som följer på den sista nollan (även dessa strängar kan vara tomma och förvandlas då till en nolla).

Omvänt, given en summa av n naturliga tal som blir k ersätter vi varje plustecken med en nolla, och varje term i summan med en sträng av så många ettor som termen är stor. Detta ger uppenbarligen en binär sträng av rätt längd och med exakt $n-1$ nollor.

Vi har nu visat att varje summa ger upphov till exakt en sträng och omvänt hur varje sträng ger upphov til exakt en summa. Alltså måste antalet summor av den föreskrivna typen vara lika många som de beskrivna strängarna. $\square$

Som exempel förvandlas strängen 01110011010 till summan $0+3+0+2+1+0$ och summan $4+1+2+0$ förvandlas till strängen 1111010110.

Ett induktivt bevis av binomialsatsen

Sats: För alla positiva heltal n gäller $(a+b)^n = \sum_k \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$.

Bevis: Påståendet är sant för $n=1$, ty $\sum_k \binom{1}{k} a^k b^{1-k} = \binom{1}{0} a^0 b^1 + \binom{1}{1} a^1 b^0 = b+a = (a+b)^1$. Det återstår att visa induktionssteget. Antag därför att påståendet gäller för $n-1$. Då har vi

$$\begin{aligned}
(a+b)^n &= (a+b)(a+b)^{n-1} = (a+b) \sum_k \binom{n-1}{k} a^k b^{(n-1)-k} \\
&= \sum_k \binom{n-1}{k} a^{k+1} b^{(n-1)-k} + \sum_k \binom{n-1}{k} a^k b^{(n-1)-k+1} \\
&= \sum_k \binom{n-1}{k-1} a^k b^{(n-1)-(k-1)} + \sum_k \binom{n-1}{k} a^k b^{n-k} \\
&= \sum_k \left[\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} \right] a^k b^{n-k} \\
&= \sum_k \binom{n}{k} a^k b^{n-k}. \qquad \square
\end{aligned}$$