Motivera alla svar. Spara uppgifterna (med mina kommentarer) när ni får tillbaka dem. Detta gäller alla inlämningsuppgifter och det är mycket viktigt.

Uppvärmning

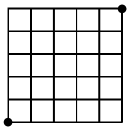
(i) Hur många olika ”ord” kan man bilda med bokstäverna i ”kackerlacka” om man måste använda alla elva bokstäverna?

(ii) På hur många olika sätt kan man placera 12 personer runt ett (runt) bord, om man bara bryr sig om den inbördes ordningen?

(iii) Visa att $\sum_k \binom{n}{k} 2^{n-k} = 3^n$.

(iv) Visa kombinatoriskt att $\sum_i \binom{k}{i}\binom{n-k}{d-i} = \binom{n}{d}$.

(v) På hur många olika sätt kan man ta sig från $(0, 0)$ till (n, n) i planet, om man bara får gå längs kanter i heltalsgittret och bara ta steg uppåt eller till höger?



Att lämna in torsdag den 10 september

1. På hur många olika sätt kan man placera 8 torn på ett shackbräde så att inget kan ta ett annat?

2. Antag att vi har $2n$ personer som skall paras ihop två och två. På hur många olika sätt kan detta göras?

3. (a) Hur många av delmängderna i $[n] = \{1, 2, \ldots, n\}$ innehåller talet 1?
   (b) Visa *kombinatoriskt* att det finns lika många delmängder i $[n]$ som innehåller talet 1 respektive *inte* innehåller 1.

4. På hur många olika sätt kan man skriva ett naturligt tal k som summan av n naturliga tal, där ordningen är väsentlig? Exempelvis kan 2 skrivas på sex sätt med tre tal:
$$0+0+2, \quad 0+2+0, \quad 2+0+0, \quad 0+1+1, \quad 1+0+1, \quad 1+1+0.$$
   Ge en formel i form av binomialkoefficienter (och ett kombinatoriskt argument).

5. Visa följande likhet (för $p > 0$):
$$\sum_{a=1}^{t} \sum_{b=1}^{p} \binom{p}{b} (t-a)^{p-b} = t^p.$$
   Ledning: Vilka värden antar $t - a$ respektive $p - b$? Använd detta för att skriva om. Skriv sedan om binomialkoefficienten och använd binomialsatsen.

6. Ge kombinatoriska bevis av följande identiteter:
   (a) $\binom{n}{k}\binom{k}{i} = \binom{n}{i}\binom{n-i}{k-i}$,
   (b) $\sum_k \binom{n}{k} 2^k = 3^n$.

☞

Bonusproblem (inget samarbete)

7. Placera n punkter på en cirkel och dra kordan mellan varje par av punkter. Antag att punkterna är *generiskt placerade*, d v s att inga tre kordor skärs i samma punkt. Bestäm antalet områden inuti cirkeln (ge en enkel formel och visa den kombinatoriskt).

   Tips: Kolla de första fallen och formulera en gissning. Den var säkert felaktig. Kolla ett (par) fall till och försök skriva resultatet som en elegant (viktigt!) summa av binomialtal. Om du känner dig osäker, visa resultatet med induktion. (Men det som skall lämnas in är ett snyggt kombinatoriskt bevis!)

Ytterligare övningar

1. Hur många olika halsband kan man göra av 20 perfekta, lika stora kulor där inga två har samma färg? (Svaret är inte lika med $n!$ för något n.)
2. Hur många av delmängderna till mängden $\{1, 2, \ldots, 10\}$ innehåller åtminstone ett udda tal?
3. Hur många binära strängar av längd 13 finns det som innehåller exakt 5 ettor och inte har två på varandra följande ettor?
4. Låt F_n vara det n-te Fibonaccitalet. Visa att antalet sätt att skriva n som en summa av 1-or och 2-or (där ordningen spelar roll) är lika med F_n. Exempelvis kan 4 skrivas på $5 = F_4$ sätt:

$$1 + 1 + 1 + 1, \quad 1 + 1 + 2, \quad 1 + 2 + 1, \quad 2 + 1 + 1, \quad 2 + 2.$$

5. Visa att F_{n+1} är lika med antalet delmängder i $\{1, 2, \ldots, n\}$ som inte innehåller två på varandra följande tal. Ledning: Varje sådan mängd innehåller antingen n eller så gör den inte det.
6. Försök hitta en snygg bijektion mellan objekten som räknas i de två föregående övningarna (för F_n respektive F_{n+1}).
7. På hur många olika sätt kan man placera 12 personer runt ett (runt) bord om två av personerna inte får sitta bredvid varann?
8. Om 15 lag skall tävla så att varje lag möter varje annat exakt en gång, hur många matcher blir det? Vad är den allmänna formeln för n lag? Obs: Svaret skall *inte* vara en summa!
9. Hur många vägar av minimal längd, längs kanter, från origo till punkten $(1, 1, \ldots, 1)$ finns det i d-dimensionella enhetskuben?
10. Låt M vara en icke-tom mängd, låt j vara antalet delmängder i M som har ett jämnt antal element och låt u vara antalet delmängder i M som har ett udda antal element.

    (c) Använd binomialsatsen för att visa att $j = u$.

    (d) Ge ett kombinatoriskt bevis, d v s para ihop varje ”jämn” delmängd med en unik ”udda” delmängd och omvänt.

    (e) Är påståendet sant när $M = \emptyset$? (Detta fall är en av många motiveringar för en viss definition, som ibland uppfattas som onaturlig.)