Motivera alla svar. Spara uppgifterna (med mina kommentarer) när ni får tillbaka dem. Detta gäller alla inlämningsuppgifter och det är mycket viktigt.

Uppvärmning

(i) Bestäm, för var och en av följande relationer på respektive mängder, om relationen är reflexiv, symmetrisk, antisymmetrisk, transitiv.

(a) $xRy \iff$ x vet y:s namn, på mängden {elever i E3}.

(b) $xRy \iff x + y$ är udda, på mängden $\mathbb{N}$.

(c) $xRy \iff x + y$ är jämnt, på mängden $\mathbb{N}$.

(d) $xRy \iff x$ är minst lika lång som y, på mängden {alla svenskar}.

(e) $xRy \iff x = 2y$, på mängden $\mathbb{N}$.

(f) $\{(a,a),(b,b),(c,c),(b,a),(a,c),(c,a)\}$, på mängden $\{a,b,c\}$.

(g) $xRy \iff x$ och y har samma lutning, på mängden {linjer i planet}.

Svar: ⅃Ƨʁɹɔɹ(ƃ) ‘ʁ(ɟ) ‘∀(ɐ) ‘ʁ⅃∀(ʔ)(ɒ) ‘⅃Ƨʁɹ(ɔ) ‘Ƨ(ɹ) ‘ʁ(ɐ)

(ii) Bestäm om relationen R, på mängden M_n, är en ekvivalensrelation och/eller partiell ordning. Rita, i sådana fall, den förenklade grafen eller Hassediagrammet, för $n = 3$.

(a) Låt $M_n = A_n \times A_n$ där $A_n = \{0, \ldots, n-1\}$. Definiera relationen R på M_n genom

$$< a, b > \; R \; < c, d > \iff \; a \leq c \;\text{ och }\; b \leq d.$$

(b) Definiera relationen R på mängden M_n av binära n-bitars ord genom

$$(x_1 x_2 \cdots x_n)\, R\, (y_1 y_2 \cdots y_n) \iff x_i \leq y_i \text{ för alla } i.$$

(c) Definiera relationen R på mängden av binära strängar av längd $n \geq 0$ genom

$$xRy \iff x_i \cdot y_i \leq y_i \quad \text{för alla } i,$$

där $x = (x_1, \ldots, x_n)$ och $y = (y_1, \ldots, y_n)$ och $\cdot$ är vanlig multiplikation.

(iii) Skriv matrisen för relationen i (ii)(b) ovan, först så att elementen i mängden skrivs i ordningen 000,001,011,111,110,100,010,101, och sedan när elementen skrivs i ordningen 000,001,010,100,011,101,110,111. Den senare matrisen har en intressant egenskap som förhoppningsvis blir uppenbar. Gäller det för alla partiella ordningar att man kan skriva elementen i en sådan ordning att matrisen ser ut på det här trevliga sättet?

(iv) Låt $M = \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$ där $\mathbb{R}^+$ är mängden av alla positiva reella tal. Definiera relationen S på M genom

$$(a, b) S (c, d) \iff a + b = c + d.$$

Visa att S är en ekvivalensrelation och beskriv ekvivalensklasserna (som delmängder i planet $\mathbb{R}^2$).

(v) Låt M_n vara mängden av alla binära n–bitars ord. Låt $[n] = \{1, 2, \ldots, n\}$. Definiera relationen S på M_n genom att sätta $x_1 x_2 \cdots x_n S y_1 y_2 \cdots y_n \iff$ det finns en bijektion $\phi : [n] \to [n]$ så att $x_i = y_{\phi(i)}$ för varje i. Exempel: $0101S1100$, men *inte* $101S100$.

Visa att S är en ekvivalensrelation och beskriv ekvivalensklasserna. Bestäm också hur stora de olika ekvivalensklasserna är.

Att lämna in torsdag den 17 september

1. För vilka n uppfyller $\mathbb{Z}_n$ att det för varje $a \in \mathbb{Z}_n$ så att $a \not\equiv 0$ finns ett $b \in \mathbb{Z}_n$ så att $ab \equiv 1 \bmod n$? Ledning: För vilka n finns x, y i $\mathbb{Z}_n$ så att $ax \equiv ay$ för något $a \not\equiv 0$, men $x \not\equiv y$? Betrakta sedan $\{ax \mid x \in \mathbb{Z}_n\}$.

2. Gör om uppgift (v) ovan när $a + b = c + d$ byts mot $ad = bc$.

3. Låt $S_n = \{k \in \mathbb{N} \mid k \text{ delar } n\}$. Detta är ett gitter med avseende på relationen

$$aDb \iff a \text{ delar } b.$$

   Visa att S_n är ett distributivt gitter. Ledning: Låt $p_1, p_2, \ldots, p_k$ vara primfaktorerna i n. Då kan varje tal i S_n representeras av en k-vektor $(a_1, a_2, \ldots, a_k)$ där $p_i^{a_i}$ är den största potensen av p_i som delar n. Exempel: I S_{120} representeras 20 av $(2, 0, 1)$ om $p_1 = 2$, $p_2 = 3$ och $p_3 = 5$. Hur kan man nu representera $\wedge$ och $\vee$ i S_n?

4. Definiera relationen R på noderna i en riktad graf G genom

$$xRy \iff \text{det finns en riktad väg från } x \text{ till } y \text{ i } G.$$

   Ge nödvändiga och tillräckliga villkor på G för att R skall vara en partiell ordning. Gör lösningen så kortfattad som möjligt! (För definition av riktad graf, se Biggs 11.1.)

Bara nödvändiga och tillräckliga villkor. Inget annat! (Utom motiveringen)

5. En total ordning T på en mängd M *respekterar* en partiell ordning P på M om $P \subseteq T$ (som relationer). Det är en enkel sak att hitta en total ordning som respekterar en given partiell ordning. Om två partiella ordningar P och Q är givna (på samma mängd M), under vilka förutsättningar kan man hitta en total ordning T som respekterar både P och Q? Ge också en algoritm för hur man kan hitta T i sådana fall.

Bonusproblem (inget samarbete)

6. Låt a, b och n vara naturliga tal. Definiera relationen S på mängden av alla heltal genom att sätta

$$xSy \iff ax + by \equiv 0 \pmod{n}.$$

   För vilka par (a, b) är S en ekvivalensrelation? För vilka par (a, b) är S lika med kongruens mod n?

Ytterligare övningar

1. Vad kan man säga om en relation som är både symmetrisk och antisymmetrisk?

2. Låt D vara delbarhetsrelationen på mängden $\{2, 3, 4, \ldots\}$ av naturliga tal större än 1. Vilka är de minimala elementen?

3. Betrakta relationen "kongruens modulo 3" på mängden $\{1, 2, 3, 4, 5, 7\}$. Skriv matrisen för denna relation, först för elementen i växande ordning, sedan när elementen skrivs i ordningen 1,4,7,3,2,5. Vad är det som händer med matrisen i det senare fallet? Varför är det lättare att kvadrera den senare matrisen? Kan man alltid göra så med en ekvivalensrelation?

4. Låt M vara mängden av alla satslogiska utsagor (ett exempel på en sådan utsaga är $P \longrightarrow (Q \vee \neg R)$). Definiera relationen Ψ på M genom

$$A \Psi B \text{ om och endast om } B \text{ följer av } A.$$

   Avgör om Ψ är en ekvivalensrelation och/eller partiell ordning.