Motivera alla svar. Spara uppgifterna (med mina kommentarer) när ni får tillbaka dem. Detta gäller alla inlämningsuppgifter och det är mycket viktigt

## Uppvärmning

(i) Visa att i en Boolesk algebra gäller $x \cdot x = x$, $x \cdot \hat{0} = \hat{0}$, och $\overline{\hat{0}} = \hat{1}$.

(ii) Varje element i en Boolesk algebra kan skrivas på ett unikt sätt som summan av atomer. Varför är detta så uppenbart för den Booleska algebran av alla delmängder till en mängd?

(iii) Låt $B_n$ vara den Booleska algebran av alla binära strängar av längd $n$. Definiera $\phi : B_3 \longrightarrow B_2$ genom $\phi(x_1x_2x_3) = x_1x_2$. Är detta en Boolesk homomorfi?

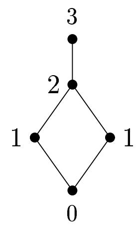
(iv) Om vi istället sätter $\phi(x_1x_2x_3) = x_1y$, där $y = x_2 \cdot x_3$, är $\phi$ då en Boolesk homomorfi?

(v) Definiera $\phi : B_3 \longrightarrow B_1$ genom $\phi(x_1x_2x_3) = 1$ om $x_1+x_2+x_3$ udda, och $\phi(x_1x_2x_3) = 0$ annars. Är $\phi$ en Boolesk homomorfi?

(vi) Hur många isomorfier finns det från den Booleska algebran $B_n$ till sig själv?

## Att lämna in torsdag den 24 september

1. Visa De Morgans lagar för Booleska algebror: $\overline{(a+b)} = \overline{a} \cdot \overline{b}$ och $\overline{(a \cdot b)} = \overline{a} + \overline{b}$. Du får endast använda vår Definition 18 (på stencilen *Relationer, gitter och* ...).



Rang

2. Ett (ändligt) gitter är *graderat* om det för varje $x$ gäller att varje uppåtgående väg längs kanter i Hassediagrammet från $\hat{0}$ till $x$ har samma längd. I så fall är *rangen* av $x$ antalet kanter i en sådan väg.

   Hur många element av rang $k$ finns det i delbarhetsgittret för $S_{510510}$? Ledning: $S_{510510}$ är en Boolesk algebra.

3. Utgående från definitionen av Boolesk homomorfi (Definition 20) och Definition 18, visa att $\phi$ är en Boolesk homomorfi om $\phi$ bevarar $+$ och $\overline{\phantom{x}}$, d v s om $\phi(x+y) = \phi(x) + \phi(y)$ och $\phi(\overline{x}) = \overline{\phi(x)}$.

4. Låt $S_n = \{k \in \mathbb{N} \mid k \text{ delar } n\}$. Detta är ett gitter m.a.p. delbarhetsrelationen.

   Låt $B_2$ beteckna den booleska algebran med två element, 0 och 1. Definiera funktionen

$$\phi : S_n \to B_2$$

   genom

$$\phi(x) = \begin{cases} 0 & \text{om } x \text{ udda} \\ 1 & \text{om } x \text{ jämnt} \end{cases}$$

   (a) Är $\phi$ en gitterhomomorfi?

   (b) I de fall då $S_n$ är en boolesk algebra, är $\phi$ en boolesk homomorfi? Ledning: dela upp i två fall: $n$ jämnt, resp. $n$ udda.

**Bonusproblem (inget samarbete)**

5. Låt $S_n = \{k \in \mathbb{N} \mid k \text{ delar } n\}$. Detta är ett gitter med avseende på relationen $aDb \iff a$ delar $b$. För vilka $n$ är $S_n$ en Boolesk algebra?

**Ytterligare övningar**

1. I boken *Grundläggande digital- och datorteknik* finns, i avsnittet Boolesk algebra, nio såkallade ”satser” för Boolesk algebra. Några av dessa ingår i vår alternativa definition av boolesk algebra. Visa de andra utgående enbart från vår definition.

2. Låt $M_R$ vara relationsmatrisen för en relation $R$. Kan man säga något allmänt om $M_R$:s inverterbarhet när $R$ är en ekvivalensrelation respektive partiell ordning? Ledning: Varje partiell ordning kan utvidgas till en total ordning. Vad har inversen för betydelse (om den existerar)? “Ledning”: Jag har ingen aning.

3. Låt $M$ vara mängden av alla satslogiska utsagor. Definiera relationen $\sim$ på $M$ genom

$$A \sim B \text{ om och endast om } B \iff A,$$

d v s $A \sim B$ betyder att $A$ och $B$ är ekvivalenta utsagor. M a o är $A$ sann om och endast om $B$ är sann.

Exempel: $\neg(P \vee Q) \iff (\neg P \wedge \neg Q)$, så $\neg(P \vee Q) \sim (\neg P \wedge \neg Q)$

Observera att $A$ och $B$ är *utsagor*, inte (nödvändigtvis) variabler.

   (a) Visa att $\sim$ är en ekvivalensrelation på $M$.

   (b) Låt
   $$K = \{[A]_\sim \mid A \in M\},$$
   d v s $K$ är mängden av ekvivalensklasser i $M$ med avseende på $\sim$.
   Definiera relationen $\Psi$ på $K$ via
   $$[A]\Psi[B] \text{ om och endast om } A' \Rightarrow B' \text{ för något } A' \in [A] \text{ och något } B' \in [B].$$
   Visa att $\Psi$ är en partiell ordning.

   (c) Finns det några minimala/maximala element i $K_\Psi$? Finns det ett största/minsta element i $K_\Psi$?

   (d) Är $K_\Psi$ en boolesk algebra?

   (e) Om vi begränsar antalet variabler i våra utsagor till $n$, hur många element har då $K_\Psi$?

4. Låt $\sim$ vara en ekvivalensrelation på en mängd $M$ och låt

$$D = \{A \subseteq M \mid \text{ om } x, y \in A \text{ då } x \sim y\}.$$

Låt $P$ vara delmängdsalgebran på $D$. Visa att de maximala elementen i den partiella ordningen $P$ är ekvivalensklasserna för $\sim$.