Motivera alla svar. Spara uppgifterna (med mina kommentarer) när ni får tillbaka dem. Detta gäller alla inlämningsuppgifter och det är mycket viktigt

Uppvärmning

(i) Bestäm alla kodord i koden som har följande generatormatris. Hur många fel upptäcker koden? Hur många fel rättar den? Bestäm den motsvarande kontrollmatrisen.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

(ii) Gör motsvarande för koden som har följande *kontrollmatris.*

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(iii) (Biggs 17.2-4) Låt C vara en linjär kod och låt $J \subseteq C$ vara mängden av alla kodord i C av jämn vikt. Visa att J är en linjär kod. Visa också att en linjär kod har antingen bara kodord av jämn vikt eller exakt hälften av jämn vikt, hälften udda.

(iv) Låt C vara en kod vars kontrollmatris K har dimensionerna $(n-k) \times n$ och vars generatormatris G är $n \times k$.

(a) Hur förändras koden om man kastar om raderna eller kolonnerna i K? Vad händer om man adderar en rad till en annan? En linjärkombination av några rader till en annan rad?

(b) Vad kan man säga om G i detta avseende?

(c) Antag att C har dimensionen k. Visa att man med hjälp av ovanstående operationer kan överföra K (och G) på normaliserad form som i övning 2 nedan.

(v) Låt C vara koden som genereras av matrisen G i marginalen.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

(a) Normalisera G.

(b) Bestäm en kontrollmatris och kodens vikt.

(c) Bestäm alla felsyndrom som kan uppstå om det har blivit ett fel i kodordet.

(d) Avkoda orden 0011010, 0001111 och 0101100, d v s bestäm, m h a kontrollmatrisen, vilket kodord som ligger närmast vart och ett av dess ord.

(vi) (Biggs 17.2-2) Om $\mathbf{x}$ är ett kodord i en kod av längd n, visa att antalet ord som kan uppstå om man får högst två fel i $\mathbf{x}$ är

$$(n^2 + n + 2)/2.$$

OBS: Skriv först om ovanstående uttryck till en snygg formel med binomialtal. Just det; *snygg*

(vii) Hur ser generatormatrisen ut för repetitionskoden av längd n? Det var lätt. Hur blir kontrollmatrisen?

Att lämna in tisdag den 6 oktober

1. Det finns en $(3,1)$–Hammingkod (se avsnitt 17.4 i boken).

   (a) Konstruera en kontrollmatris för denna kod så att kolonnerna motsvarar talen 1, 2, 3 skrivna binärt (titta på matrisen för $(7,4)$–Hammingkoden i boken).

   Normaliserad form, se Biggs 17.3, sid 383

   (b) Bestäm matrisens *kärna* (nollrum) och därmed alla kodorden i denna kod.

   (c) Rita koden som hörn i den 3-dimensionella enhetskuben och förklara *geometriskt* varför koden rättar ett fel.

   (d) Är koden perfekt?

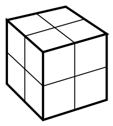
2. Låt K vara kontrollmatrisen för en kod C, och antag att $K = [I_k\ M]$, där I_k är en $k \times k$, enhetsmatris och M är en $k \times (n-k)$ matris. Låt $G = \begin{bmatrix} M \\ I_{n-k} \end{bmatrix}$. Visa att G är en generatormatris för C, d v s att mängden kodord i C består av alla linjära kombinationer (över $\mathbb{Z}_2$) av kolonnerna i G. Med andra ord är C lika med *kolonnrummet* för G.

   Bonus: Visa att om G ovan är generatormatrisen för en kod, då är K kontrollmatrisen för samma kod.

3. (Biggs 17.1-4) Visa *triangelolikheten* $d(\mathbf{x},\mathbf{y}) \leq d(\mathbf{x},\mathbf{z}) + d(\mathbf{z},\mathbf{y})$, där $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$, $\mathbf{z}$ är element i $\mathbb{Z}_2^n$. Om vi ser elementen i $\mathbb{Z}_2^n$ som hörnen i n-dimensionella enhetskuben, vad säger då denna olikhet (uttryckt i ord)?

4. Låt T vara en *ternär* kod av längd n, d v s T är ett linjärt underrum i $\mathbb{Z}_3^n$. Låt $\mathbf{x}$ vara ett givet ord i $\mathbb{Z}_3^n$. Hur många olika ord i $\mathbb{Z}_3^n$ kan uppstå från $\mathbf{x}$ om det blir i fel i $\mathbf{x}$?

   Koden T är *perfekt* om det för varje ord $\mathbf{x} \in \mathbb{Z}_3^n$ finns exakt ett kodord $\mathbf{w} \in T$ så att $\mathbf{x}$ skiljer sig från $\mathbf{w}$ på högst e platser. (I så fall rättar koden e fel.)

   Visa att den nödvändiga likheten för en perfekt ternär kod är uppfylld för $n = 11$, $e = 2$. (Jfr. med Exemplet i avsnitt 17.2 i Biggs.)

   Faktum är att det finns en sådan kod, d v s en perfekt ternär kod av längd 11 som rättar två fel.

Bonusproblem (inget samarbete)

5. Titta på Exemplet i avsnitt 17.2. En perfekt binär kod måste uppfylla villkoret där, med *likhet* istället för "$\leq$."

   En kod C som rättar e fel är *perfekt* om varje hörn i den n-dimensionella enhetskuben ligger på avstånd $d \leq e$ från exakt ett kodord i C.

   Hur många binära koder av längd mindre än 30, som rättar fler än 1 fel, kan det som mest finnas enligt detta villkor? Vilka av dessa fall är triviala?

   Svara gärna, om du kan, hur många sådana koder av längd mindre än 100 det kan finnas som mest.

   Du måste lösa problemet själv, och du måste förklara hur du har kommit fram till svaret. Däremot behöver du inte bevisa att svaret är korrekt. Det är alltså fritt fram (och förmodligen nödvändigt) att använda datorer som stöd. Antagligen måste man använda något program som klarar heltalsberäkningar med stora heltal.