Diskret Matematik E3 | **PRELIMINÄRT!** | Hemuppgifter 5
ht 98

Motivera alla svar. Spara uppgifterna (med mina kommentarer) när ni får tillbaka dem.

Uppvärmning

(i) Låt G vara en ändlig graf och låt $\delta(x)$ beteckna graden av noden x. Visa att $\sum_{x\in G}\delta(x)$ är ett jämnt tal.

(ii) Visa att antalet noder av udda grad i en ändlig graf G är jämnt.

(iii) Visa att komplementet till G är sammanhängande om G inte är sammanhängande. Komplementet till G är grafen med samma noder som G men där två noder är grannar om och endast om de inte är det i G.

(iv) Låt T vara ett godtyckligt träd med n noder. Bestäm T:s kromatiska polynom.

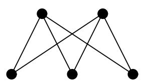
(v) Bestäm det kromatiska polynomet (på lämplig form!) för den fullständiga grafen K_n.

(vi) Låt G vare en bipartit graf med ett udda antal noder. Visa att G inte kan ha en Hamiltoncykel.

Att lämna in torsdag den 15 oktober

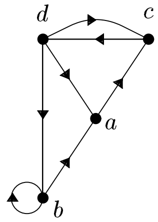
1. Hur många Eulercykler finns det i K_n (den fullständiga grafen på n noder)? Hur många Hamiltoncykler? Två cykler bör betraktas som samma cykel om de innehåller samma kanter.

2. Bestäm det kromatiska polynomet för grafen i marginalen. Kolla svaret, i synnerhet att det ger rätt värden för $n = 0, 1, 2$! (0, 0, 2, 30, 204, 860).



3. Låt G vara en ändlig riktad graf som är *acyklisk*, d v s som inte har någon riktad cykel. Visa att G har en *källa*, d v s en nod med inga kanter riktade *till* sig. Visa att G även har en *sänka*, d v s en nod med inga kanter riktade från sig.

   Bonus: Ge exempel på en riktad acyklisk graf som har varken sänka eller källa. *Visa* att den är acyklisk!



4. Hur många riktade vägar av längd 8 utgår från a i den riktade grafen till höger? Ledning: Multiplicera *inte* sju gånger!

5. Visa att en graf G har åtminstone $\binom{k}{2}$ kanter där $k = \chi(G)$.

Bonusproblem (inget samarbete)

6. Låt G_k vara komplementet till grafen med k noder. Bestäm G_k:s kromatiska polynom.

   Ledning: Skriv polynomet i basen $\{(n)_i \mid i \in \mathbb{N}\}$. Med andra ord, bestäm antalet sätt att dela upp G_k i i stabila mängder, för varje i.

   Alternativt kan du få ett par poäng om du tar fram en rekursiv formel: Låt $\chi_k(n)$ vara det kromatiska polynomet för G_k. Bestäm $\chi_1(n)$ och $\chi_2(n)$. Ta sedan fram en rekursiv formel för det allmänna fallet genom att lägga till en kant i G_k (vilket motsvarar att man tar bort en kant i komplementet) respektive identifierar den kantens noder.