Booleska algebror

Definition 20 Låt B och C vara två Booleska algebror. En *boolesk homomorfi* är en funktion $\phi : B \longrightarrow C$ som uppfyller följande villkor för alla x, y i B:

(i) $\phi(x \cdot y) = \phi(x) \cdot \phi(y)$,

(ii) $\phi(x + y) = \phi(x) + \phi(y)$,

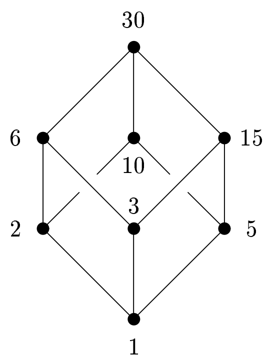
(iii) $\phi(\overline{x}) = \overline{\phi(x)}$,

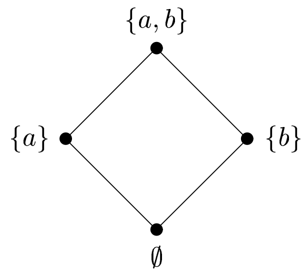
(iv) $\phi(\hat{0}_B) = \hat{0}_C, \ \ \phi(\hat{1}_B) = \hat{1}_C$.

(Här står $\hat{0}_B$ för $\hat{0}$-elementet i B etc.) Om ϕ dessutom är bijektiv är ϕ en *Boolesk isomorfi.*

Om två Booleska algebror är isomorfa, då är deras Hassediagram identiska (bortsett från namnen på elementen).

Låt nu S_{30} vara delbarhetsgittret för 30 och låt B_2 vara mängdalgebran för en mängd med två element. Deras respektive Hassediagram ser ut så här:





Definiera funktionen $\phi : S_{30} \longrightarrow B_2$ på följande sätt:

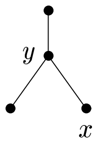
$$\phi(1) = \phi(3) = \emptyset, \qquad \phi(2) = \phi(6) = \{a\},$$
$$\phi(5) = \phi(15) = \{b\}, \qquad \phi(10) = \phi(30) = \{a, b\}.$$

Detta är en Boolesk homomorfi, vilket kan verifieras genom att kontrollera att $\phi(x + y) = \phi(x) + \phi(y)$ och $\phi(\overline{x}) = \overline{\phi(x)}$, för alla x, y i S_{30}. (Se Inlämningsuppgift 3). Exempelvis har vi att $\phi(3 + 5) = \phi(15) = \{b\} = \emptyset + \{b\} = \phi(3) + \phi(5)$ och $\phi(\overline{2}) = \phi(15) = \{b\} = \overline{\{a\}} = \overline{\phi(2)}$.

Att ϕ bevarar i någon utsträckning strukturen i S_{30} kan ses på olika sätt. Till exempel skulle vi kunna säga att ϕ ”kollapsar” den övre kvadraten i Hassediagrammet på den nedre och sedan skickar 2 till $\{a\}$, 5 till $\{b\}$ etc. Vi kan som sagt tänka oss att ϕ först ”projicerar” hela S_{30} på S_6 (som motsvaras av den nedre kvadraten) för att sedan byta varje tal mot en delmängd. Vi kan också säga att kollapsen motsvarar att vi delar bort 3 i de tal i S_{30} som är multiplar av 3.

Om man däremot tänker sig att S_{30} motsvarar delmängdsalgebran för mängden $\{a, b, c\}$, på så sätt att 2 motsvarar $\{a\}$, 5 motsvarar $\{b\}$ och 3 motsvarar $\{c\}$, då kan man säga att ϕ motsvarar det att man helt enkelt tar bort elementet c ur alla delmängderna.

Om x och y är element i ett gitter så att $x \leq y$ och så att det inte finns något z skilt från x och y så att $x \leq z \leq y$, då säger vi att y *täcker* x vilket betecknas $x \lessdot y$. I Hassediagrammet betyder detta att y ligger strax ovanför x.



y täcker x

Definition 21 En *atom* i ett gitter är ett element som täcker $\hat{0}$. En *koatom* är ett element som täcks av $\hat{1}$.

Vi ger nu en följd av satser som tillsammans har som konsekvens att varje Boolesk algebra är isomorf med delmängdsalgebran.

Sats 22

(i) Om x är en atom i en Boolesk algebra B, då gäller för alla $y \in B$ att $xy = \hat{0}$ eller $xy = x$.

(ii) Om x_1, x_2 är atomer i B och $x_1 \neq x_2$, då är $x_1 x_2 = 0$.

Sats 23 *Om $x_1, x_2, \ldots, x_n$ är alla atomerna i en Boolesk algebra B och $x \in B$ ett element så att $xx_i = \hat{0}$ för alla i, då är $x = \hat{0}$.*

Sats 24 *Varje element i en Boolesk algebra kan skrivas på ett unikt sätt som summan av atomer (och som produkten av koatomer).*

Detta är uppenbart för delmängds-algebran

Sats 25 *Varje Boolesk algebra är isomorf med delmängdsalgebran för någon mängd.*

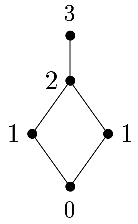
Sats 26 *Om B är en Boolesk algebra med n atomer, då har B 2^n element.*

Definition 27 Låt f vara en formel vars variabler är element i ett gitter eller Boolesk algebra. Den *duala formeln* till f är den formel man får genom att byta $\wedge$ mot $\vee$ och tvärtom, och $\hat{0}$ mot $\hat{1}$ och tvärtom.

Dualitetsprincipen: Låt f vara en formel som håller i alla gitter/Booleska algebror. Då håller dualen till f också i alla gitter/Booleska algebror.

Det intuitiva beviset av detta består i att vända upp och ned på Hassediagrammen till alla gitter/Booleska algebror!

Definition 28 Ett (ändligt) gitter är *graderat* om det för varje x gäller att varje uppåtgående väg längs kanter i Hassediagrammet från $\hat{0}$ till x har samma längd. I så fall är *rangen* av x antalet kanter i en sådan väg.



Rang