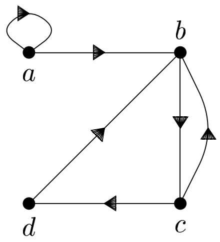
DISKRET MATEMATIK E3
HT 98

Relationer, gitter och Booleska algebror

En relation kan representeras som en matris, och som en riktad graf. Låt t ex $\mathcal{R}$ vara relationen på mängden $\{a, b, c, d\}$ som består av paren $(a, a), (a, b), (b, c), (c, b), (c, d), (d, b)$. Då har vi följande matris och graf:



$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{cccc} a & b & c & d \end{array} \\ \begin{array}{c} a \\ b \\ c \\ d \end{array} & \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

Sats 13 *Låt $\mathcal{R}$ vara en relation (på en ändlig mängd) och $M = (m_{ij})$ den motsvarande matrisen. Då gäller följande:*

1. *$\mathcal{R}$ är reflexiv omm $m_{ii} = 1$ för alla i.* omm = om och endast om
2. *$\mathcal{R}$ är symmetrisk omm M är symmetrisk, d v s omm $m_{ij} = m_{ji}$ för alla i.*
3. *$\mathcal{R}$ är antisymmetrisk omm $([i \neq j \;\text{ och }\; m_{ij} = 1] \Rightarrow m_{ji} = 0)$*
4. *$\mathcal{R}$ är transitiv omm $M * M \leq M$, där $A * B$ är AB med alla positiva element reducerade till 1 och $X \leq Y$ betyder att varje element i X är mindre än eller lika med motsvarande element i Y.*

Påståendena 1, 2 och 3 i satsen är uppenbara. För att se att 4 gäller måste man studera hur $M * M$ bildas. Det gör vi inte nu, men återkommer till detta.

Definition 14 Låt $\mathcal{R}$ och $\mathcal{S}$ vara relationer på en mängd M. *Kompositionen av $\mathcal{R}$ med $\mathcal{S}$* är relationen på M som definieras av

$$\mathcal{R} \circ \mathcal{S} = \{(x, y) \mid \text{ det finns } z \in M \text{ så att } x\mathcal{R}z \text{ och } z\mathcal{S}y\}.$$

Sats 15 *Om $M_{\mathcal{R}}$ och $M_{\mathcal{S}}$ är matriserna för $\mathcal{R}$ respektive $\mathcal{S}$, då är $M_{\mathcal{R}} * M_{\mathcal{S}}$ matrisen för $\mathcal{R} \circ \mathcal{S}$.*

Kompositionen av två relationer är inte alltid meningsfull, men kan i andra fall vara intressant. Låter vi t ex $x\mathcal{R}y$ beteckna relationen att x är barn till y, då blir $\mathcal{R} \circ \mathcal{R}$ relationen "att vara barnbarn til."

Definition 16 Låt G och H vara två gitter. En *(gitter)homomorfi från G till H* är en funktion $\phi : G \longrightarrow H$ så att

(i) $\phi(x \vee y) = \phi(x) \vee \phi(y)$, och

(ii) $\phi(x \wedge y) = \phi(x) \wedge \phi(y)$

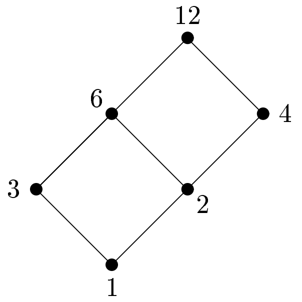
för alla $x, y \in G$. Om ϕ dessutom är bijektiv då är ϕ en *isomorfi.*, En homomorfi bevarar i någon mån gitterstrukturen i G, d v s att ϕ avbildar G på något *delgitter* av H (ett delgitter är en delmängd M i ett gitter H så att M är ett gitter med avseende på relationen i H). Om ϕ är injektiv (inga två element i G skickas till samma element i H), då avbildas G på en "kopia" av sig självt i H. Om ϕ är en isomorfi, då är G och H "identiska" i någon mening.

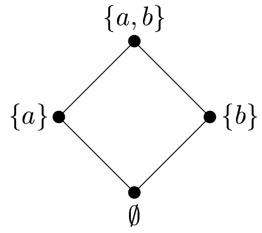
Låt S_{12} vara delbarhetsgittret av alla delare till 12 och låt B_2 vara delmängdsalgebran på mängden $\{a, b\}$. Definiera funktionerna $\phi : S_{12} \longrightarrow B_2$ och $\psi : B_2 \longrightarrow S_{12}$ så här:

$$\phi(1) = \emptyset, \quad \phi(2) = \{b\}, \quad \phi(3) = \{a\}, \quad \phi(6) = \{a, b\}, \quad \phi(4) = \{b\}, \quad \phi(12) = \{a, b\},$$

$$\psi(\emptyset) = 1, \quad \psi(\{a\}) = 3, \quad \psi(\{b\}) = 2, \quad \psi(\{a, b\}) = 6.$$

Båda är homomorfier. Vi ser exempelvis att $\phi(3 \vee 4) = \phi(12) = \{a, b\} = \{a\} \vee \{b\} = \phi(3) \vee \phi(4)$. Om vi studerar Hassediagrammen för dessa gitter kan vi se på ett "grafiskt" sätt hur ϕ och ψ verkar.





Sats 17 *Låt $\phi : G \longrightarrow H$ vara en gitterhomomorfi. Då är $\phi(G) = \{\phi(x) \mid x \in G\}$ ett delgitter till H.*

I exemplet ovan syns till exempel att $\psi(B_2)$ består av den "nedre kvadraten" i S_{12}, vilken är ett gitter, nämligen gittret S_6. Definierar vi ψ som en funktion från B_2 till S_6, men låter dess värden vara som ovan, då blir ψ en isomorfi.

Definition 18 (Alternativ definition av Boolesk algebra) En *boolesk algebra* är en mängd M tillsammans med två associativa binära operationer, $\cdot$ och $+$, en unär operation, $\overline{}$, och två element $\hat{0}$ och $\hat{1}$, som uppfyller följande villkor för alla element $x, y, z \in M$:

1. $x \cdot y = y \cdot x$, $\qquad x + y = y + x$,
2. $x \cdot (y + z) = (x \cdot y) + (x \cdot z)$, $\qquad x + (y \cdot z) = (x + y) \cdot (x + z)$,
3. $x \cdot \hat{1} = x$, $\qquad x + \hat{0} = x$,
4. $x \cdot \overline{x} = \hat{0}$, $\qquad x + \overline{x} = \hat{1}$.

Sats 19 *Låt M vara en mängd med operationer som i Definition 18. Definiera relationen $\leq$ på M genom*

$$x \leq y \iff x \cdot y = x.$$

Då är $\leq$ en partiell ordning på M.

Bevis: Eftersom $x \cdot x = x$ (enligt kommande hemuppgift!) har vi $x \leq x$, så $\leq$ är reflexiv.

Vidare har vi att om $x \leq y$ och $y \leq x$ då är $x \cdot y = x$ och $y \cdot x = y$, men $x \cdot y = y \cdot x$, vilket medför att $x = y$, så $\leq$ är antisymmetrisk.

Antag att $x \leq y$ och $y \leq z$. Då är $x \cdot y = x$ och $y \cdot z = y$, så $x \cdot z = (x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z) = x \cdot y = x$, vilket betyder att $x \leq z$ och därmed att $\leq$ är transitiv. $\square$