Kromatiska polynom

Definition 1 Låt G vara en ändlig graf. Det *kromatiska polynomet till* G är funktionen $\chi_G(n)$ = antal sätt att färglägga G med (högst) n färger.

Sats: Det kromatiska polynomet är ett polynom!

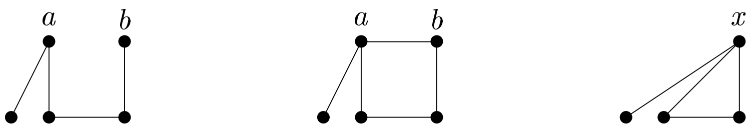
Observera att det *kromatiska talet* för G, $\chi(G)$, är lika med det minsta positiva heltalet p för vilket $\chi_G(p)$ är större än 0.

Ett sätt att bestämma det kromatiska polynomet till en graf G är följande:

Sats 2 *Given en ändlig graf G, och två olika noder a, b i G, så att (a, b) inte är en kant i G, låt G_{a-b} vara grafen som fås genom att lägga till en kant mellan a och b i G, och låt $G_{a=b}$ vara grafen som fås genom att ersätta a och b med en nod x så att x har en kant till varje nod som a eller b har en kant till i G. Då är*

$$\chi_G(n) = \chi_{G_{a-b}}(n) + \chi_{G_{a=b}}(n).$$

Bevis: Varje färgning av G där a och b har olika färger motsvarar exakt en färgning av G_{a-b} och varje färgning av G där a och b ha samma färg motsvarar exakt en färgning av $G_{a=b}$. $\square$



$$\chi_G(n) \quad = \quad \chi_{G_{a-b}}(n) \quad + \quad \chi_{G_{a=b}}(n)$$

Definition 3 Låt G vara en graf och M en mängd av noder i G. Mängden M är *stabil* om inga två noder i M utgör en kant i G.

Stable eller *independent* på engelska

Definition 4 Den i-te *fallande fakulteten* av n är $(n)_i = n(n-1)(n-2)\cdots(n-i+1)$. Vi sätter $(n)_0 = 1$.

En färgning av G med k färger ger alltid upphov till en partition av noderna i G i k stabila mängder, för varje mängd av likfärgade noder måste vara stabil. Omvänt ger en partition av noderna i G i k stabila mängder en färgning av G med k färger, genom att de stabila mängderna tilldelas var sin färg. Om vi har n färger till vårt förfogande kan detta göras på $n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)$ olika sätt, det vill säga på $(n)_k$ olika sätt. Därav följande sats.

Sats 5 *Låt $S_G(k)$ vara antalet sätt att dela upp noderna i G i k stabila mängder. Då har vi*

$$\chi_G(n) = \sum_k S_k(n)_k.$$

Ur denna sats följer direkt att $\chi_G(n)$ är ett polynom i n, för $(n)_k$ är uppenbarligen ett polynom i n för varje k.