Diskret matematik E3
ht 98

Relationer

Definition 1 En *relation* $\mathcal{R}$ på en mängd M är en delmängd i kryssprodukten $M \times M$.

Låt $\mathcal{R}$ vara relationen "mindre än" på mängden $M = \{1, 2, 3\}$. Då består $\mathcal{R}$ av de tre paren $(1, 2), (1, 3)$ och $(2, 3)$, som alla är element i $M \times M$. Alltså kan vi skriva

$$\mathcal{R} = \{(1, 2), (1, 3), (2, 3)\}.$$

Ett annat sätt att beskriva att 1 står i relationen $\mathcal{R}$ till 2 är att skriva $1\mathcal{R}2$.

Vi studerar främst följande fyra egenskaper hos relationer:

Definition 2 En relation på en mängd M är

1. *reflexiv* om det för varje $x \in M$ gäller $x\mathcal{R}x$,
2. *symmetrisk* om det för varje par $x, y \in M$ gäller att om $x\mathcal{R}y$ då $y\mathcal{R}x$,
3. *antisymmetrisk* om det för varje par $x, y \in M$ gäller att om $x\mathcal{R}y$ och $y\mathcal{R}x$ då är $x = y$,
4. *transitiv* om det för varje $x, y, z \in M$ gäller att om $x\mathcal{R}y$ och $y\mathcal{R}z$, då $x\mathcal{R}z$.

Observera att endast reflexiviteten ställer några krav på att något element skall vara relaterat till något annat i M. Den tomma relationen, d v s relationen $\mathcal{R}$ där $x\mathcal{R}y$ inte gäller för något par (x, y), är symmetrisk, antisymmetrisk och transitiv (men inte reflexiv, om $M \neq \emptyset$). I synnerhet behöver en relation varken vara symmetrisk eller antisymmetrisk, och en relation kan vara både och.

Relationen "=" har alla fyra egenskaperna (vilket kan uppfattas som konstigt förutom när det gäller reflexiviteten).

Definition 3 En relation som är reflexiv, symmetrisk och transitiv kallas *ekvivalensrelation.*

Definition 4 Låt $\sim$ vara en ekvivalensrelation på M och $a \in M$. Då är a:s *ekvivalensklass* (med avseende på M) $[a] = \{x \in M \mid a \sim x\}$.

Definition 5 Låt M vara en mängd och $A_1, A_2, \ldots, A_n$ delmängder i M. Då är $\{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$ en *partition av* M om följande två villkor är uppfyllda:

(i) $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n = M$,

(ii) $A_i \cap A_j = \emptyset$ om $i \neq j$.

Sats 6 *Ekvivalensklasserna till en ekvivalensrelation på en mängd M utgör en partition av M.*

För många ekvivalensrelationer är det uppenbart vilka ekvivalensklasserna är. Om t ex relationen är "att vara född samma år," då består varje ekvivalensklass av alla de personer som är födda ett visst år. För relationen "kongruens modulo 4" (på $\mathbb{N}$) finns exakt fyra ekvivalensklasser, nämligen $\{0, 4, 8, \ldots\}$, $\{1, 5, 9, \ldots\}$, $\{2, 6, 10, \ldots\}$, $\{3, 7, 11, \ldots\}$,. Det är ofta användbart att välja ut en representant för varje ekvivalensklass. För ekvivalens modulo 4 väljer man gärna talen 0, 1, 2, 3, som vart och ett är det minsta i sin klass. Mer allmänt, för relationen "kongruens modulo n," väljer man oftast talen $0, 1, 2, \ldots, n-1$ som representanter för ekvivalensklasserna. Det är faktiskt just det som de flesta datorspråk använder i sin "moduloräkning."

Definition 7 En relation som är reflexiv, antisymmetrisk och transitiv kallas *partiell ordning.*

Ett exempel på en ekvivalensrelation är relationen $\sim$ på mängden av svenska ord som definieras av

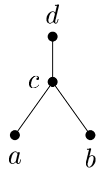
$$x \sim y \iff x \text{ och } y \text{ har lika många bokstäver.}$$

Det är vanligt att beteckna en ekvivalensrelation med $\sim$.

Ett exempel på en partiell ordning är relationen $\mathcal{R}$ på $\mathbb{R}$ som definieras av

$$x\mathcal{R}y \iff x \leq y.$$

Man betecknar ofta partiella ordningar med $\leq$. En mängd P tillsammans med en partiell ordning kallas *pomängd.*



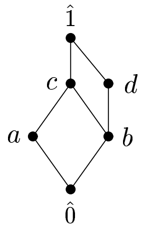
En partiell ordning på en ändlig mängd M kan beskrivas med ett *Hassediagram.* I marginalen finns Hassediagrammet för den partiella ordningen på $\{a, b, c, d\}$ som består av paren (a, c), (b, c), (a, d), (b, d) och (c, d) (och alla par (x, x)).

Definition 8 Låt P vara en pomängd (där relationen betecknas $\leq$) och $x, y \in P$. En *övre gräns* för x, y är ett element $z \in P$ så att $x \leq z$ och $y \leq z$. En *undre gräns* definieras på analogt sätt.

En *minsta övre gräns* för x, y är ett element z så att z är en övre gräns för x, y och så att varje övre gräns w för x, y uppfyller $z \leq w$. Detta betecknas med $x \vee y = z$. En *största undre gräns* definieras analogt och betecknas med $x \wedge y$.

I Hassediagrammet ovan syns att både c och d är övre gränser för a och b, men $a \vee b = c$, medan $a \wedge b$ inte existerar. Däremot är $c \vee d = d$ och $c \wedge d = c$.

Definition 9 Ett *gitter* är en pomängd där $x \vee y$ och $x \wedge y$ existerar för varje par (x, y).



I gittret ovan är a och d varandras komplement, men b och c har inga komplement

Definition 10 Ett element m i ett gitter (pomängd) G kallas $\hat{0}$ om $m \leq x$ för alla $x \in G$. Om däremot $x \leq m$ för alla $x \in G$ då kallas m för $\hat{1}$.

Vi säger även att $\hat{0}$ är ett *minsta element* i G och att $\hat{1}$ är ett *största element.* Det är lätt att visa att det bara kan finnas ett minsta och ett största element i ett gitter (pomängd).

Definition 11 Låt G vara ett gitter med $\hat{0}$ och $\hat{1}$. Ett *komplement* till $x \in G$ är ett element $\bar{x} \in G$ så att $x \wedge \bar{x} = \hat{0}$ och $x \vee \bar{x} = \hat{1}$. G sägs vara *komplementerat* om varje element i G har ett komplement.

Definition 12 Ett gitter G är *distributivt* om det för alla a, b, c i G gäller

$$\begin{aligned} a \wedge (b \vee c) &= (a \wedge b) \vee (a \wedge c), \\ a \vee (b \wedge c) &= (a \vee b) \wedge (a \vee c). \end{aligned}$$

Definition 13 En *Boolesk algebra* är ett komplementerat, distributivt gitter.