DISKRET MATEMATIK E3 HEMUPPGIFTER 1
HT 99

Motivera alla svar. Spara uppgifterna (med mina kommentarer) när ni får tillbaka dem. Detta gäller alla inlämningsuppgifter och det är mycket viktigt.

Uppvärmning

1. Om 15 lag skall tävla så att varje lag möter varje annat exakt en gång, hur många matcher blir det? Vad är den allmänna formeln för n lag? Obs: Svaret skall *inte* vara en summa!

(ii) Hur många olika ”ord” kan man bilda med bokstäverna i ”kackerlacka” om man måste använda alla elva bokstäverna?

(iii) På hur många olika sätt kan man placera 12 personer runt ett (runt) bord, om man bara bryr sig om den inbördes ordningen?

(iv) Hur många vägar av minimal längd, längs kanter, från origo till punkten $(1, 1, \ldots, 1)$ finns det i d-dimensionella enhetskuben?

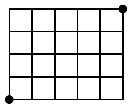
(v) Antag att vi har $2n$ personer som skall paras ihop två och två. På hur många olika sätt kan detta göras?

(vi) Visa kombinatoriskt att $\binom{n}{k}\binom{k}{i} = \binom{n}{i}\binom{n-i}{k-i}$ och att $\sum_k \binom{n}{k} 2^k = 3^n$.

Att lämna in torsdag den 9 september

1. Hur många olika $n \times n$ matriser finns det som har exakt en etta i varje rad och varje kolonn, och bara nollor iövrigt?

2. På hur många olika sätt kan man ta sig från $(0, 0)$ till (n, k) i planet, om man bara får gå längs kanter i heltalsgittret och bara ta steg uppåt eller till höger? Ge ett *enkelt* kombinatoriskt bevis.



3. Låt M vara en icke-tom mängd, låt j vara antalet delmängder i M som har ett jämnt antal element och låt u vara antalet delmängder i M som har ett udda antal element.

   (a) Använd binomialsatsen för att visa att $j = u$.

   (b) Ge ett kombinatoriskt bevis, d v s para ihop varje ”jämn” delmängd med en unik ”udda” delmängd och omvänt.

   (c) Är påståendet sant när $M = \emptyset$? (Detta fall är en av många motiveringar för en viss definition, som ibland uppfattas som onaturlig.)

4. Hur många binära strängar av längd n finns det som innehåller exakt k ettor och inte har två på varandra följande ettor?

5. Visa följande likhet (för $p > 0$):

$$\sum_{a=1}^{t} \sum_{b=1}^{p} \binom{p}{b} (t-a)^{p-b} = t^p.$$

   Ledning: Vilka värden antar $t - a$ respektive $p - b$? Använd detta för att skriva om. Skriv sedan om binomialkoefficienten och använd binomialsatsen.

6. Ge ett kombinatoriskt bevis av identiteten $\sum_i \binom{n}{i}\binom{n-i}{k-i} = \binom{n}{k}$.

☞

Bonusproblem (inget samarbete)

7. Placera n punkter på en cirkel och dra kordan mellan varje par av punkter. Antag att punkterna är *generiskt placerade*, d v s att inga tre kordor skärs i samma punkt. Bestäm antalet områden inuti cirkeln (ge en enkel formel och visa den kombinatoriskt). Tips: Kolla de första fallen och formulera en gissning. Den var säkert felaktig. Kolla ett (par) fall till och försök skriva resultatet som en elegant (viktigt!) summa av binomialtal. Om du känner dig osäker, visa resultatet med induktion.

Ytterligare övningar

1. I Inlämningsuppgift 2 ovan bestämde ni antalet kortaste vägar från $(0,0)$ till (n,n). Varje sådan väg måste passera diagonalen $y = n - x$ och består således av två unika vägar, den ena från $(0,0)$ till $(k, n-k)$ för något k, och den andra från $(k, n-k)$ till (n,n). Använd detta för att skriva en likhet som i vänsterled består av en summa av produkter av binomialkoefficienter och vars högerled är svaret i Inlämningsuppgift 2.

2. Hur många olika halsband kan man göra av 20 perfekta, lika stora kulor där inga två har samma färg? Antag att halsbandet är slutet, d v s att det inte går att säga var det ”börjar”. (Svaret är inte lika med $n!$ för något n.)

3. Hur många av delmängderna till mängden $\{1, 2, \ldots, 10\}$ innehåller åtminstone ett udda tal?

4. Låt F_n vara det n-te Fibonaccitalet. Visa att antalet sätt att skriva n som en summa av 1-or och 2-or (där ordningen spelar roll) är lika med F_n. Exempelvis kan 4 skrivas på $5 = F_4$ sätt:

$$1+1+1+1, \quad 1+1+2, \quad 1+2+1, \quad 2+1+1, \quad 2+2.$$

5. Visa att F_{n+1} är lika med antalet delmängder i $\{1, 2, \ldots, n\}$ som inte innehåller två på varandra följande tal. Ledning: Varje sådan mängd innehåller antingen n eller så gör den inte det.

6. Försök hitta en snygg bijektion mellan objekten som räknas i de två föregående övningarna (för F_n respektive F_{n+1}).