| |
|---|
| Motivera alla svar. Spara uppgifterna (med mina kommentarer) när ni får tillbaka dem. Detta gäller alla inlämningsuppgifter och det är mycket viktigt |

## Uppvärmning

(i) Bestäm, för var och en av följande relationer på respektive mängder, om relationen är reflexiv, symmetrisk, antisymmetrisk, transitiv.

(a) $xRy \iff x$ vet $y$:s namn, på mängden {elever i E3}.

(b) $xRy \iff x+y$ är udda, på mängden $\mathbb{N}$.

(c) $xRy \iff x+y$ är jämnt, på mängden $\mathbb{N}$.

(d) $xRy \iff x$ är minst lika lång som $y$, på mängden {alla svenskar}.

(e) $xRy \iff x = 2y$, på mängden $\mathbb{N}$.

(f) $\{(a,a),(b,b),(c,c),(b,a),(a,c),(c,a)\}$, på mängden $\{a,b,c\}$.

(g) $xRy \iff x$ och $y$ har samma lutning, på mängden {linjer i planet}.

Svar: (a)R, (b)S, (c)RST, (d)RTA(?), (e)A, (f)R, (g)RST

(ii) Bestäm om relationen $R$, på mängden $M_n$, är en ekvivalensrelation och/eller partiell ordning. Rita, i sådana fall, den förenklade grafen eller Hassediagrammet, för $n = 3$.

(a) Låt $M_n = A_n \times A_n$ där $A_n = \{0, \dots, n-1\}$. Definiera relationen $R$ på $M_n$ genom

$$< a, b > \; R \; < c, d > \iff a \le c \text{ och } b \le d.$$

(b) Definiera relationen $R$ på mängden $M_n$ av binära $n$-bitars ord genom

$$(x_1 x_2 \cdots x_n) \, R \, (y_1 y_2 \cdots y_n) \iff x_i \le y_i \text{ för alla } i.$$

(iii) Skriv matrisen för relationen i (ii)(b) ovan, först så att elementen i mängden skrivs i ordningen 000,001,011,111,110,100,010,101, och sedan när elementen skrivs i ordningen 000,001,010,100,011,101,110,111. Den senare matrisen har en intressant egenskap som förhoppningsvis blir uppenbar. Gäller det för alla partiella ordningar att man kan skriva elementen i en sådan ordning att matrisen ser ut på det här trevliga sättet?

(iv) Låt $M = \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$ där $\mathbb{R}^+$ är mängden av alla positiva reella tal. Definiera relationen $S$ på $M$ genom

$$(a, b) S (c, d) \iff ad = bc.$$

Visa att $S$ är en ekvivalensrelation och beskriv ekvivalensklasserna geometriskt som delmängder i planet $\mathbb{R}^2$.

Geometriskt betyder här bildmässigt

(v) Finn felet i följande "bevis." **Sats:** Låt $R$ vara en relation som är både symmetrisk och transitiv. Då är $R$ även reflexiv. **Bevis:** Antag att $xRy$. Eftersom $R$ är symmetrisk har vi då även $yRx$, men av $xRy$ och $yRx$ följer, enligt transitiviteten, att $xRx$, så $R$ är reflexiv.

Bra övning för att förstå vad definitionerna innebär

(vi) Vad kan man säga om en relation $R$ som är både symmetrisk och antisymmetrisk? I vilken välkänd relation måste $R$ vara en delmängd?

(vii) Låt $D$ vara delbarhetsrelationen på mängden $\{2, 3, 4, \dots\}$ av naturliga tal större än 1. Vilka är de minimala elementen?

## Att lämna in tisdag den 21 september

1. Definiera relationen $R$ på mängden av binära strängar av längd $n$ genom Rättad

$$\mathbf{x} R \mathbf{y} \iff x_i \leq y_i \quad \text{för alla } i,$$

där $\mathbf{x} = x_1 x_2 \cdots x_n$ och $\mathbf{y} = y_1 y_2 \cdots y_n$. Visa att $R$ är en partiell ordning och rita Hassediagrammet för fallet $n = 3$.

2. Definiera relationen $S$ på mängden av alla heltal genom Rättad

$$xSy \iff 2x + y \equiv 0 \pmod 3,$$

Visa att $S$ är en ekvivalensrelation. Beskriv ekvivalensklasserna. Vilken "enklare" ekvivalensrelation är $S$ lika med?

3. Gör om uppgift (iv) ovan när $ad = bc$ byts mot $a + b = c + d$.

4. Låt $S_n = \{k \in \mathbb{N} \mid k \text{ delar } n\}$. Detta är ett gitter med avseende på relationen

$$aDb \iff a \text{ delar } b.$$

Visa att $S_n$ är ett distributivt gitter. Ledning: Låt $p_1, p_2, \ldots, p_k$ vara primfaktorerna i $n$. Då kan varje tal i $S_n$ representeras av en $k$-vektor $(a_1, a_2, \ldots, a_k)$ där $p_i^{a_i}$ är den största potensen av $p_i$ som delar $n$. Exempel: I $S_{120}$ representeras 20 av $(2, 0, 1)$ om $p_1 = 2$, $p_2 = 3$ och $p_3 = 5$. Hur kan man nu representera $\wedge$ och $\vee$ i $S_n$?

5. (Se övning 2 ovan.) Låt $a$, $b$ och $n$ vara naturliga tal. Definiera relationen $S$ på mängden av alla heltal genom att sätta

$$xSy \iff ax + by \equiv 0 \pmod n.$$

För vilka par $(a, b)$ är $S$ en ekvivalensrelation? För vilka par $(a, b)$ är $S$ lika med kongruens mod $n$?

## Bonusproblem (inget samarbete)

6. En total ordning $T$ på en mängd $M$ *respekterar* en partiell ordning $P$ på $M$ om $P \subseteq T$. Det är en enkel sak att hitta en total ordning som respekterar *en* given partiell ordning. Tänk först ut hur man kan göra det (men lämna inte in det).

Om två partiella ordningar $P$ och $Q$ är givna (på samma mängd $M$), under vilka förutsättningar kan man hitta en total ordning $T$ som respekterar både $P$ och $Q$? Ge också en algoritm för hur man kan hitta $T$ i sådana fall.

Kolla att ditt svar stämmer för pomängderna $a < x$, $b < y$ resp. $y < a$, $x < b$.

## Ytterligare övningar

Fler övningar på kursens hemsida!

1. Låt $M_n$ vara mängden av alla binära $n$–bitars ord. Låt $[n] = \{1, 2, \ldots, n\}$. Definiera relationen $S$ på $M_n$ genom att sätta $x_1 x_2 \cdots x_n S y_1 y_2 \cdots y_n \iff$ det finns en bijektion $\phi : [n] \to [n]$ så att $x_i = y_{\phi(i)}$ för varje $i$. Exempel: $0101 S 1100$, men *inte* $101 S 100$.

Visa att $S$ är en ekvivalensrelation och beskriv ekvivalensklasserna. Bestäm också hur stora de olika ekvivalensklasserna är.

2. Betrakta relationen "kongruens modulo 3" på mängden $\{1, 2, 3, 4, 5, 7\}$. Skriv matrisen för denna relation, först för elementen i växande ordning, sedan när elementen skrivs i ordningen 1,4,7,3,2,5. Vad är det som händer med matrisen i det senare fallet? Varför är det lättare att kvadrera den senare matrisen? Kan man alltid göra så med en ekvivalensrelation?

3. Låt $M$ vara mängden av alla satslogiska utsagor (ett exempel på en sådan utsaga är $P \longrightarrow (Q \vee \neg R)$). Definiera relationen $\Psi$ på $M$ genom

$$A \Psi B \text{ om och endast om } B \text{ följer av } A.$$

Avgör om $\Psi$ är en ekvivalensrelation och/eller partiell ordning.

4. För vilka $n$ uppfyller $\mathbb{Z}_n$ att det för varje $a \in \mathbb{Z}_n$ så att $a \not\equiv 0$ finns ett $b \in \mathbb{Z}_n$ så att $ab \equiv 1 \bmod n$? Ledning: För vilka $n$ finns $x, y$ i $\mathbb{Z}_n$ så att $ax \equiv ay$ för något $a \not\equiv 0$, men $x \not\equiv y$? Betrakta sedan $\{ax \mid x \in \mathbb{Z}_n\}$.

5. Definiera relationen $R$ på noderna i en riktad graf $G$ genom

$$xRy \iff \text{det finns en riktad väg från } x \text{ till } y \text{ i } G.$$

Ge nödvändiga och tillräckliga villkor på $G$ för att $R$ skall vara en partiell ordning. Gör lösningen så kortfattad som möjligt! OBS: Blanda inte ihop kant och väg!

Bara nödvändiga och tillräckliga villkor. Inget annat!

Riktad väg = *directed walk*
kant = *edge*